lares o redondeadas, que se adornaron con escudos, del modo que se aprecia en la fotografía.

Sobre los muros de acompañamiento se construyeron barandillas de hormigón armado, que también se ven en la fotografía del remate decorativo, que terminan en pretiles de sillería sobre las pilastras en que finalizan los muros de acompañamiento y separan la obra de los tramos de muros de sostenimiento que siguen sin imposta y con sencillos pretiles de mampostería y de hormigón.

Los resultados de las cubicaciones en estas partes son los siguientes:

Hormigón en masa	10,985	m³
Sillería recta labrada	40,681	»
Sillería aplantillada labrada	59,626	»
Bordillo de piedra para andenes	402,20	m l
Pavimento de andenes	513,50	m²
Barandilla de hormigón armado	53,10	m l
Hierro en barandilla y remates	34,734	kg

Con lo que se lleva dicho y con los dibujos y fotografías que a este modesto artículo acompañan, entre las que se incluye la del modelo hecho por la casa Warez, de Madrid, para la Exposición Iberoamericana, estimo podrá formarse idea exacta de la obra de que se trata, cuyo proyecto, en la forma descrita, hice en 1925 y que ha sido ejecutado con toda escrupulosidad por el ingeniero constructor Sr. Luiña, como lo demostró el resultado completamente satisfactorio de las pruebas oficiales, a las que asistí como ingeniero encargado de la inspección de la obra, ya que a mi petición, al dejar de pertenecer a la Jefatura de Obras públicas de Teruel, se me concedió por la Superioridad continuase al frente de la obra hasta su total terminación.

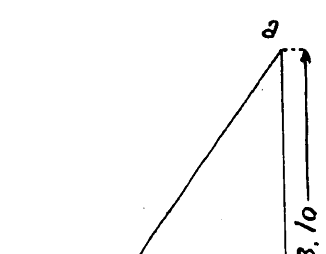
Terminado en este artículo lo referente a la descripción de la obra, me propongo en otro presentar a los compañeros el desarrollo de los cálculos de estabilidad comprendidos en el proyecto.

Fernando HUÉ
Ingeniero de C., C. y P.

Cálculos de estabilidad de la presa del Burguillo

Como continuación al artículo descriptivo de las obras del Salto del Burguillo publicados en el número de 15 de agosto último, presentamos en éste los cálculos realizados para comprobar la estabilidad de la presa.

Comprobación del perfil adoptado.—El cálculo de los esfuerzos y cargas de trabajo lo hacemos sobre un elemento de presa formado por *seis* metros de lo



que pudiéramos llamar «pantalla» y un contrafuerte. Para su estudio tomamos como eje de las x el de la sección base del contrafuerte, y de las y el vertical que pasa por la intersección de aquél con el paramento virtual de la «pantalla» (que es vertical), fijando como sentidos positivos el de aguas arriba para el primero y el de abajo hacia arriba para el segundo.

La forma geométrica de cada contrafuerte (perfil máximo) resulta restando del prisma de base triangular *abc* (alzado), de 23,10 m de altura por 16 m de base y 3 m de espesor, dos tetraedros simétricos, uno de cada lado, cuyas bases son esa misma del prisma, y la altura de cada uno 0,90 m.

El espesor del contrafuerte disminuye así con la altura, quedando reducido a 1,20 m en lo más alto.

La notación que vamos a emplear es la siguiente:

n = cargas de trabajo normales sobre las secciones horizontales y cuya dirección es, por consiguiente, vertical.
n_1 = cargas de trabajo normales en las secciones verticales y cuya dirección es perpendicular a la de n.
t = cargas de trabajo tangenciales en las secciones horizontales y verticales, puesto que ambas son iguales para cada punto.
N = cargas máximas de compresión.
N_1 = cargas mínimas de compresión.
T = cargas tangenciales máximas.

Los valores de n los obtendremos en cada sección por la fórmula de la flexión compuesta:

$$n = \frac{F}{\omega} + \frac{M(x - x_g)}{I}$$

en la que:

F = esfuerzo normal.
M = momento flector.
ω = área de la sección.
I = momento de inercia.
x_g = abscisa del centro de gravedad de la sección.

Así, obtendremos los valores que se consignan en el cuadro siguiente para las secciones a 26, 21, 16, 11 y 6 m de profundidad:

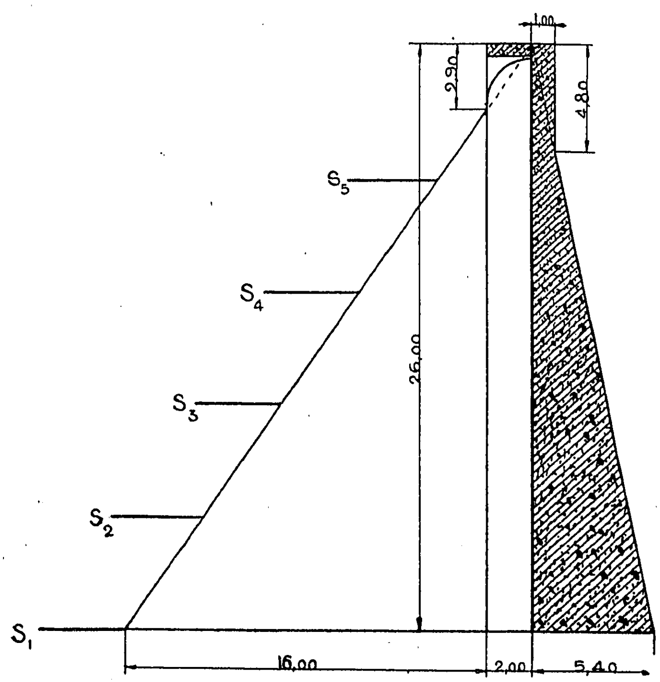
				EMBALSE VACIO					EMBALSE LLENO				
y	ω	x_g	I	F	M	n en ton/m²			F	M	n en ton/m²		
M	M²	M	M⁴	Ton	M×ton	Fórmula general	Paramento de aguas arriba	Paramento de aguas abajo	Ton	M×ton	Fórmula general	Paramento de aguas arriba	Paramento de aguas abajo
0	89,40	— 4,48	4354,5	2560	4936	$1{,}13x+33{,}7$	39,8	13,3	2981	— 9237	$-2{,}12x+23{,}8$	12,38	62,02
5	67,76	— 3,26	2129,3	1656	2330	$1{,}09x+28{,}0$	32,8	12,1	1930	— 5238	$-2{,}45x+20{,}4$	9,7	56,1
10	49,07	— 2,12	858,8	988	900	$1{,}05x+22{,}3$	25,8	10,7	1147	— 2506	$-2{,}92x+17{,}2$	7,5	49,5
15	32,91	— 1,27	244,6	518	277	$1{,}13x+17{,}1$	19,7	8,5	593	— 845	$-3{,}45x+13{,}6$	5,8	39,9
20	19,59	— 0,70	36,0	219,5	57,7	$1{,}60x+12{,}3$	14,3	5,6	242	— 123	$-3{,}42x+\ 9{,}9$	5,6	24,1

Las expresiones que nos dan los valores de t las obtenemos estableciendo el equilibrio del trozo de rebanada horizontal, por la ecuación correspondiente a la proyección de las fuerzas sobre el eje de las y.

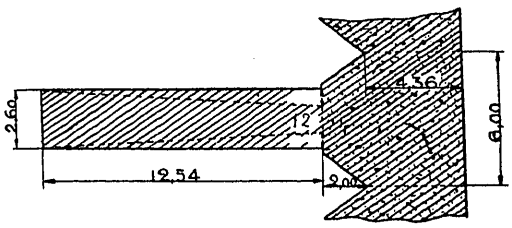
Para la mayor sencillez de las fórmulas, establecemos el equilibrio de la parte de rebanada de aguas abajo para obtener la que nos dé los valores de t entre $x = x_0$ y $x = -2$, y el de la parte de aguas arriba para las entre $x = -2$ y $x = x_2$, siendo:

x_0 = abscisa del paramento de aguas abajo.

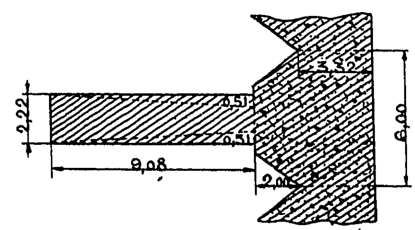
x_2 = abscisa del paramento de aguas arriba.



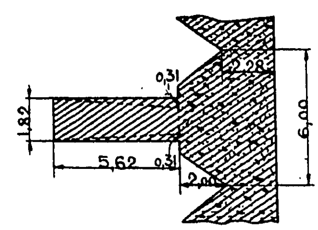
Corte y proyección vertical



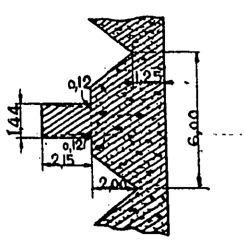
Sección horizontal S_2



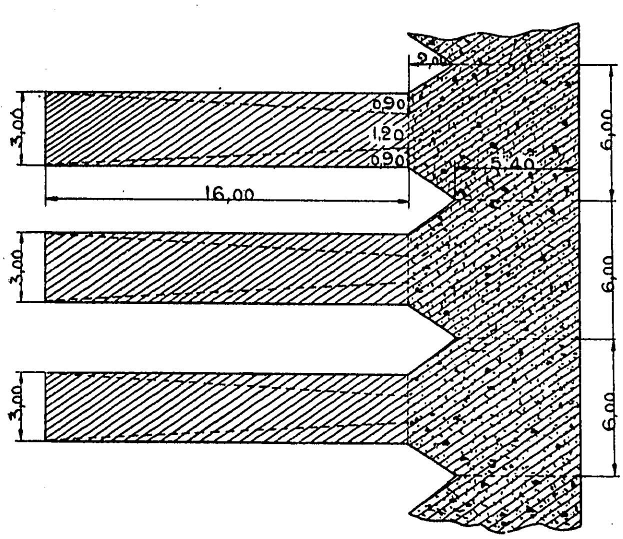
Sección horizontal S_3



Sección S_4

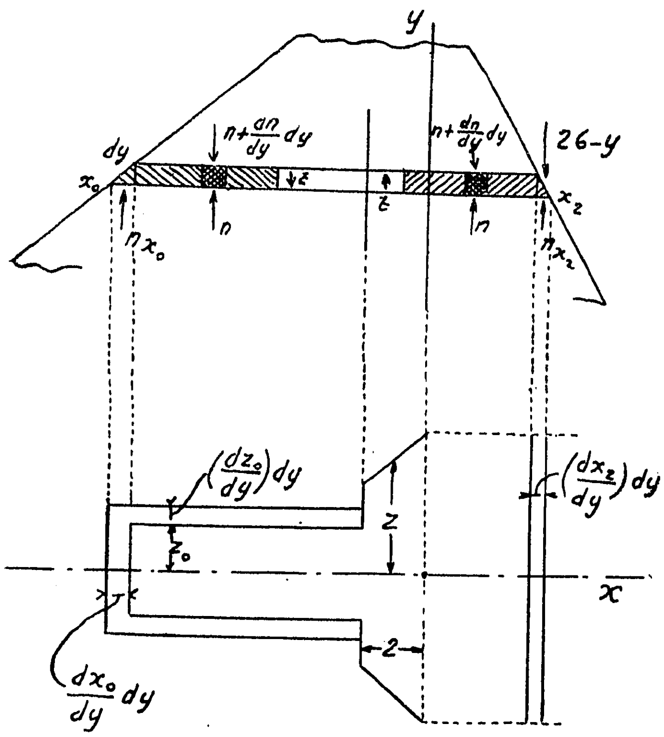


Sección S_5



Sección horizontal S_1 de la base

Analizando y teniendo en cuenta todas las fuerzas elementales que actúan sobre la rebanada, las cuales,



para mayor claridad, se han indicado y escrito sobre el croquis, obtendremos:

Entre

$$x = x_o \qquad y \qquad x = -2 \ldots$$

$$\int_{x_o}^{x}\frac{dn}{dy}dy\cdot 2z_o \times dx - n_{x_o}\times 2z_o \times \frac{dx_o}{dy}dy - 2\int_{x_o}^{x} n \times \left(\frac{dz_o}{dy}\right)dy\cdot dx + t\times 2z_o dy + \pi\times 2z_o\times(x-x_o)\cdot dy = 0$$

de donde:

$$t = n_{x_o}\frac{dx_o}{dy} + \frac{1}{z_o}\int_{x_o}^{x} n\cdot\left(\frac{dz_o}{dy}\right)dx - \int_{x_o}^{x}\frac{dn}{dy}\cdot dx - \pi(x-x_o) \qquad [1]$$

Entre

$$x = 0 \qquad y \qquad x = x_2 \ldots$$

$$(26-y)\cdot\left(\frac{dx_2}{dy}\right)\cdot dy - n_{x_2}\left(\frac{dx_2}{dy}\right)\cdot dy + \int_{x}^{x_2}\frac{dn}{dy}\cdot dy\cdot dx + \pi(x_2-x)\cdot dy - t\cdot dy = 0$$

o sea:

$$t = \left(26-(y+n_{x_2})\right)\cdot\left(\frac{dx_2}{dy}\right) + \int_{x}^{x_2}\frac{dn}{dy}\cdot dx + \pi(x_2-x) \qquad [2]$$

y entre

$$x = -2 \qquad y \qquad x = 0$$

$$t = \frac{\left(26-(y+n_{x_2})\right)\cdot\left(\frac{dx_2}{dy}\right) + \int_{0}^{x_2}\frac{dn}{dy}\cdot dx}{0{,}25\cdot x+1} + \frac{\int_{x}^{0}\frac{dn}{dy}(0{,}25\cdot x+1)\cdot dx + \pi\left(x_2 - \frac{0{,}25\cdot x+2}{2}\cdot x\right)}{0{,}25\cdot x+1} \qquad [3]$$

puesto que el valor de z entre

$$x = -2 \qquad y \qquad x = 0$$

es

$$z = 3\cdot(0{,}25\cdot x+1)$$

En todas estas fórmulas

n_{x_o} = valor de n en el paramento de aguas abajo.
n_{x_2} = valor de n en el paramento de aguas arriba.
π = peso específico de la fábrica con que se construye la presa; y
$\left(\frac{dx_o}{dy}\right)$, $\left(\frac{dz_o}{dy}\right)$, $\left(\frac{dx_2}{dy}\right)$ = valores absolutos de las respectivas derivadas.

Las fórmulas [2] y [3] están deducidas para el caso de embalse lleno; a embalse vacío, su primer sumando se reducirá a

$$-n_{x_2}\left(\frac{dx_2}{dy}\right)$$

En todas ellas, en el caso que nos ocupa:

$$x_o = -18 + \frac{9}{13}y;\ \left(\frac{dx_o}{dy}\right) = \frac{9}{13};\ z_o = 1{,}50 - \frac{0{,}9}{23{,}10}y;$$

$$\left(\frac{dz_o}{dy}\right) = \frac{0{,}90}{23{,}10};\quad x_2 = 5{,}4 - \frac{2{,}7}{13}y;\quad \left(\frac{dx_2}{dy}\right) = \frac{2{,}7}{13};$$

$$n = P + Qx$$

en la que P y Q son dos funciones de y a determinar en cada caso.

$$n_{x_o} = P + Q\left(-18 + \frac{9}{13}\cdot y\right) = P - 18\cdot Q + \frac{9}{13}\cdot Q\cdot y$$

$$n_{x_2} = P + Q\left(5{,}4 - \frac{2{,}7}{13}\cdot y\right) = P + 5{,}4\cdot Q - \frac{2{,}7}{13}\cdot Q\cdot y$$

$$\frac{dn}{dy} = \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\cdot x$$

Sustituyendo estos valores todos, en las fórmulas [1], [2] y [3], éstas nos darán los de t para cada punto determinado por sus coordenadas.

Las expresiones analíticas de P y Q se obtendrían introduciendo en el valor de n dado por la fórmula de la flexión compuesta:

$$n = \frac{F}{\omega} + \frac{M(x-x_g)}{I}$$

los valores de F, ω, M, x_g e I expresados en función de y. Así resultaría:

$$P = \frac{F}{\omega} - \frac{Mx_g}{I} \qquad [4]$$

$$Q = \frac{M}{I} \qquad [5]$$

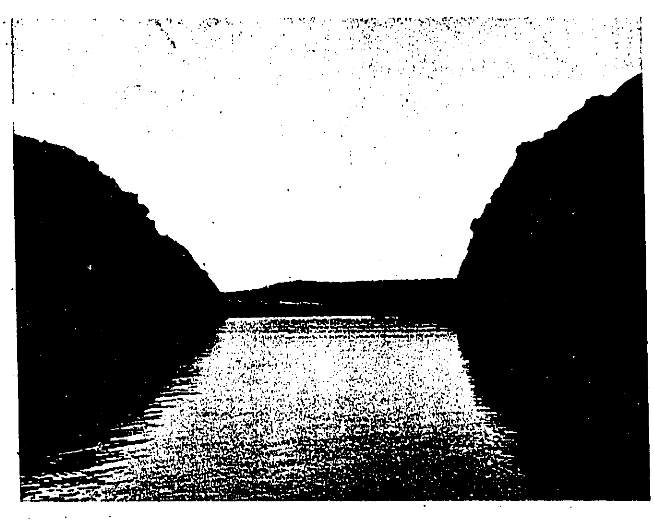
Como, dada la forma de la presa, sería un poco complicado y sin gran objeto el hallar las expresiones analíticas exactas de P y de Q, vamos a reducirnos a determinar las expresiones de t en la sección de base, a embalse lleno, en la que:

$$x_o = -18 \qquad z_o = 1{,}50 \qquad x_2 = 5{,}4 \qquad n = -2\,121\cdot x + 23{,}83$$

$$n_{x_o} = 62{,}02 \text{ ton/m}^2 \qquad n_{x_2} = 12{,}38 \text{ ton/m}^2$$

Los valores numéricos de P y Q para una sección determinada se obtienen de las mismas fórmulas [4] y [5], introduciendo en ellas los que para la misma tengan F, ω, M, x_g e I. Ahora bien, para obtener los exactos de $\frac{dP}{dy}$ y $\frac{dQ}{dy}$ sería necesario partir de las expresiones analíticas de P y Q. Sin embargo, pueden obtenerse valores aproximados de dichas derivadas partiendo de expresiones de P y Q que, más sencillas que las exactas, sean aproximadas para el valor de y correspondiente a la sección de que se trate.

Vista general del aprovechamiento hidroeléctrico del Burguillo



Vista del embalse producido por la presa

En resumen, si determinamos una función de grado $2n$ de modo que satisfaga a los valores de P en las secciones de ordenadas y_1, $y_1 + \Delta y$, $y_1 + 2\Delta y$, ..., $y_1 + (n - 1)\Delta y$, $y_1 + n\Delta y$, $y_1 - \Delta y$, $y_1 - 2\Delta y$, ..., $y_1 - (n - 1)\Delta y$, $y_1 - n\Delta y$, con lo que tendremos $2n + 1$ ecuaciones para determinar los $2n + 1$ coeficientes, la derivada de dicha función respecto a y para el valor y_1 nos dará, en general, un valor aproximado de la $\left(\frac{dP}{dy}\right)_1$ dada la continuidad y regularidad de las funciones de que se trata. Lo mismo podemos decir respecto a la $\left(\frac{dQ}{dy}\right)_1$. Así, en el caso actual, para tener una primera aproximación de los valores de $\frac{dP}{dy}$ y $\frac{dQ}{dy}$ para $y = 0$, determinaremos P y Q como si fuesen funciones de segundo grado en y, con la condición de que satisfagan a los que se obtienen para las secciones $y = 0$, $y = 0{,}25$ e $y = 0{,}50$, que son:

Para

$y = 0;\quad n = -2{,}121 \cdot x + 23{,}83;\quad P_0 = 23{,}83;\quad Q_0 = -2{,}121$

$y = 0{,}25;\quad n = -2{,}135 \cdot x + 23{,}68;\quad P_1 = 23{,}68;\quad Q_1 = -2{,}135$

$y = 0{,}50;\quad n = -2{,}150 \cdot x + 23{,}51;\quad P_2 = 23{,}51;\quad Q_2 = -2{,}150$

haciendo

$$P = Ay^2 + By + C \qquad Q = A_1y^2 + B_1y + C_1$$

podemos establecer las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} C = 23{,}83 \\ \frac{A}{16} + \frac{B}{4} = -0{,}15 \\ \frac{A}{4} + \frac{B}{2} = -0{,}32 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} C = 23{,}83 \\ B = -0{,}56 \\ A = -0{,}16 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = -2\,121 \\ \frac{A_1}{16} + \frac{B_1}{4} = -0{,}014 \\ \frac{A_1}{4} + \frac{B_1}{2} = -0{,}029 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} C_1 = -2\,121 \\ B_1 = -0{,}054 \\ A_1 = -0{,}008 \end{array}$$

y, por tanto, como primera aproximación para valores muy próximos a cero:

$$P = -0{,}16 \cdot y^2 - 0{,}56 \cdot y + 23{,}83.$$
$$Q = -0{,}008 \cdot y^2 - 0{,}054 \cdot y - 2{,}121$$

y para $y = 0$:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)_o = -0{,}56 \qquad \left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)_o = -0{,}32$$
$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)_o = -0{,}054 \qquad \left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right)_o = -0{,}016$$

Ahora bien, estos valores, como hemos dicho, no son más que aproximados, y al aplicarlos nos encontraríamos con que los que obtuviésemos de t para $x = -2$, uno por la fórmula [1] y otro por la [3], no serían iguales. Esta condición de igualdad que se debe satisfacer por corresponder al valor de t en un solo punto, nos servirá para obtener unos nuevos valores de $\left(\frac{dP}{dy}\right)_o$ y $\left(\frac{dQ}{dy}\right)_o$ partiendo de los primeramente hallados.

Apliquemos a los valores de $\left(\frac{dP}{dy}\right)_o$ y $\left(\frac{dQ}{dy}\right)_o$ así obtenidos un coeficiente $\frac{1}{R}$ al primero, y R al segundo (pues por tanteos previos se ha aprendido que varían en sentido inverso), o sea, hagamos:

$$\left(\frac{dn}{dy}\right)_o = -R \cdot 0{,}054 \cdot x - \frac{1}{R} \cdot 0{,}56$$

y vamos a determinar ese coeficiente con la condición de que la rebanada total para $y = 0$ esté en equilibrio, o lo que es lo mismo, que los valores de t obtenidos de las expresiones [1] y [3] sean iguales para $y = 0$ y $x = -2$.

Obtenemos, siendo $\pi = 2{,}3$ (peso específico $=$ $= 2{,}300$):

$$62{,}02 \cdot \frac{9}{13} + \frac{1}{1{,}5} \times \frac{0{,}9}{23{,}1} (-4\,242 - 47{,}66 + 4\,242 \times$$
$$\times 81 + 23{,}83 \times 18) - R \times 0{,}108 \times 80 + \frac{1}{R} \cdot 0{,}56 \times 16 -$$
$$-2{,}3 \times 16 = \frac{1}{1{,}5}\Big(26 \cdot \frac{2{,}7}{13} - 12{,}38 \cdot \frac{2{,}7}{13} - R \times 0{,}108 \times$$
$$\times \overline{2{,}7}^2 - 0{,}56 \times 5{,}4 \frac{1}{R} + R \times 0{,}072 - 0{,}84 \cdot \frac{1}{R} + 2{,}3 \times 6{,}9\Big)$$

$$R^2 \times 3{,}60468 + 6{,}27135 \cdot R - 8{,}344 = 0$$

$$R = \frac{-3{,}135675 + \sqrt{3{,}135675^2 + 3{,}60468 \times 8{,}344}}{3{,}60468} = 0{,}882672$$

y

$$\left(\frac{dn}{dy}\right)_o = -0{,}047664 \cdot x - 0{,}634437$$

Entrando con este valor y los antes hallados para $y = 0$ en las fórmulas [1], [2] y [3], obtenemos las expresiones de t en la sección base, que son las siguientes:

Entre

$$x = -18 \qquad x = -2$$
$$t = -0{,}0037 \cdot x^2 - 1{,}0466 \cdot x + 25{,}3013$$

Entre

$$x = -2 \qquad x = 0$$
$$t = \frac{0{,}004 \cdot x^3 - 0{,}1844 \cdot x^2 - 1{,}6656 \cdot x + 11{,}1278}{0{,}25 \cdot x - 1}$$

y entre

$$x = 0 \qquad x = 5{,}4$$
$$t = 0{,}0238 \cdot x - 1{,}6656 \cdot x + 11{,}1278$$

Como comprobación, obtengamos la resultante de todas las cargas tangenciales en la sección de base.

Dicha resultante vale:

$$3 \times \int_{-18}^{-2} (-0{,}0037 \cdot x^2 - 1{,}0466 \cdot x + 25{,}3013) \cdot dx +$$
$$+ 6 \times \int_{-2}^{0} (0{,}004 \cdot x^3 - 0{,}1844 \cdot x^2 - 1{,}6656 \cdot x + 11{,}1278) dx +$$
$$+ 6 \int_{0}^{5{,}4} (0{,}0238 \cdot x^2 - 1{,}6656 \cdot x + 11{,}1278) dx = 2076 \text{ ton}$$

que resulta igual al esfuerzo cortante en dicha sección, con un error por exceso menor del 2,5 por 100.

En el próximo número explicaremos la determinación de las expresiones n_1, cargas de trabajo normales en las secciones verticales.

Juan ROMERA
Ingeniero de Caminos

La producción[1]

I

Consideraciones generales

32. **Los tres factores de la producción.**—Es clásica la clasificación de los factores de la producción en *Naturaleza, trabajo* y *capital.*

La Naturaleza contribuye a la producción, ofreciendo el espacio, la materia y la energía de sus agentes; pero ninguno de estos elementos reúne las condiciones que requiere su utilización de un modo directo; todos han de sufrir necesariamente una modificación más o menos importante, y es el hombre el que con su trabajo y su capital realiza esta modificación.

La observación confirma la existencia de una ley fundamental en la utilización del factor Naturaleza: la de que ésta exige mayores sacrificios de capital y trabajo por unidad de producto obtenido a medida que la producción se extiende o intensifica; lo que se expresa diciendo que el rendimiento de la Naturaleza es decreciente: la explicación es sencilla. Tomemos como un primer ejemplo la *tierra.*

Supongamos el instante en que una metrópoli

[1] Véase la REVISTA de 1.° de agosto último, pág. 317.