El Arte de la Construcción

Leído por el

Excmo. Sr. D. Eduardo Torroja y Miret

En la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
el día 29 de noviembre de 1944 con motivo de su recepción

Señores académicos; señoras y señores:

Tan antigua como la Academia misma es la costumbre de empezar el discurso, en estas ocasiones, con unas palabras de modestia, porque la propia de cada elegido le hacía ver sus indudables méritos muy por bajo del honor que a ellos hacía la Corporación y ponían especial empeño en recalcarlo, dando así inconscientemente una prueba de que los demás, académicos y público, no estaban de acuerdo en este punto con el conferenciante.

Pero al pretender yo, como buen rutinario y simple imitador, seguir esta costumbre, me encuentro bien embarazado, aun cuando parezca paradójico; porque ahora en mí la modestia sería insincera si tratase de convenceros de la escasez de mis méritos, ya que supondría admitir, por mi parte, la existencia de alguien que pudiera creer fundadamente en la abundancia de ellos.

En otros casos decir esto supondría una crítica para los miembros de la Academia que intervinieron en la elección; pero, en éste, tan familiarmente especial, todo se explica buenamente por la fuerza de la tradición y la costumbre, por el respeto y la admiración de todos a aquel mi buen padre, que hace cincuenta y un años, a esta misma hora y en este mismo sitio, decía: «Llego no por merecimientos propios, sino por suma indulgencia vuestra (en mi caso es plenaria), a poseer un puesto que nunca ambicioné; y, por lo mismo que no logro hoy satisfacer aspiración alguna de mi vida, no existe velo que me impida ver con claridad la alta distinción con que me habéis favorecido, ni pasión que menoscabe el sentimiento de gratitud profunda que embarga mi alma por la benevolencia que conmigo habéis usado».

Palabras claras como la sinceridad misma de un espíritu serenamente sabio, de un hombre cristianamente humilde. Perdonad o, por bien decir, respetad este inciso ofrecido a su venerada memoria, fuera quizá del protocolo, antes de dedicar el justo homenaje a mi predecesor el Excmo. Sr. D. Miguel Vegas y Puebla Collado; porque no se puede separar éste de aquél, como no puede separarse el hijo del padre, lo mismo si la paternidad viene por la sangre que si viene por la ciencia.

Entre esos recuerdos, inciertos e indelebles a la vez, que en el fondo todavía inmaculado de nuestra memoria dejan los primeros años de la niñez, quedó para siempre la visión aleccionadora de una habitación humilde en la que dos hombres, sentados junto a una pobre mesa, frente a unas cuartillas, callaban frecuente y largamente y aun cerraban los ojos para abstraerse mejor. Eran ellos dos. Parando extrañado mis juegos para mirarlos, aprendí a reflexionar; y si hoy llego aquí, es aquello lo que me atrae.

Por aquel entonces preparaba D. Miguel su discurso de entrada en esta Academia también. Porque después de estudiar en la mayor estrechez económica su bachillerato y su carrera, ayudado solamente de su inteligencia y de su voluntad, logró terminarla brillantemente y alcanzar sucesivamente las cátedras de Zaragoza y Madrid, a la par que desarrollaba tan interesantes trabajos científicos de su especialidad que pronto fue elegido para el puesto que hoy, por desgracia doblada, vengo yo a ocupar.

Desde que pasó por el aula de mi padre, comprendió éste el valor moral y científico de su nuevo discípulo, y, como hacía siempre en estos casos, le atrajo a colaborar con él, estechándose así la buena amistad y el mutuo aprecio que los unió siempre.

Vegas fue un científico puro y un maestro completo. Gracias a las clases que de él recibí soy hoy ingeniero y por propia observación puedo señalar lo rectilíneo de su vida como característica esencial de ella.

Firme en su visión clara, inflexible en su carácter recto, bondadoso y humilde en su vida íntima, sólo pensaba en sus hijos y en sus alumnos.

Si el éxito de una vida es un ideal de juventud cumplido en la edad madura, él lo logró completo y supo mantenerlo firme hasta sus últimos días, porque sólo aspiró a ser un buen padre y un buen maestro, y supo despreciar y aun rehuir todos los honores y vanidades, mandos y prebendas, que tanto atraen a otros.

Utilizando el encantador símil del poeta indio, bien puede decirse de él que puso todo su empeño en hacer su vida recta y vacía como flauta de caña, para que la ciencia la llenara por entero con su música; y el eco de sus notas claras engarzó en acordes fecundos la generación de sus discípulos. Entre ellos, como dije, me cuento con orgullo y modestia a la vez.

El correr del tiempo se lo llevó de nuestro lado; y hoy, por azorante contrasentido de la vida, vengo a ocupar aquí su sitial, tristemente vacío; pero su espíritu, el de aquellos que amaron la verdad por encima de todo y supieron sacrificarle mansamente toda una vida, ése, para bien de todos, perdurará con su memoria en esta Casa, refugio de sus anhelos, aunque fuera la humanidad se deshaga como ahora al empuje maldito de locas ambiciones que, en momentos como éste, es mejor olvidar.

EL ARTE DE LA CONSTRUCCIÓN

Los Estatutos de esta Academia me mandan leeros un discurso sobre tema científico. Es una prueba más de que, por lo menos cuando se hicieron, no se pensaba que pudieran llegar hasta aquí personas como yo, que no soy, ni he sido, ni pienso ser más que un ingeniero constructor, dispuesto siempre a hurtar en el campo ajeno y dadivoso de la ciencia algo de lo poco que, con mis modestos aperos de trabajo, pueda servirme para constuir mejor.

Porque en eso que se ha dado en llamar, y no sin fundamento, el arte de la construcción, existe siempre un fondo esencialmente científico y más particularmente matemático sin el que hoy no puede vivir el técnico.

Ello no basta ciertamente; el ingeniero, para triunfar, necesita también otras cualidades de artista, de imaginación creadora, de voluntad, de serenidad y valentía frente al peligro, de observación, de amor y entusiasmo por su obra y, sobre todo, de sentido constructivo; un verdadero instinto de las formas resistentes, innato o adquirido; y todo ello hace que muchas veces, en su labor y en su personalidad, aparezca desdibujada su preparación científica. Sin embargo, se aprecia siempre muy acusada en las grandes figuras de la ingeniería; y la historia de la construcción es, incluso en su forma artística, y más en la técnica, un claro reflejo del avance científico y cultural de la época.

Pero en el período de la construcción que arranca del siglo XIX y continúa hoy en pleno desarrollo, la técnica necesita tanto de la ciencia como de los materiales mismos con los que construye y sólo es posible gracias a las enormes e imprevistas posibilidades que le prestan una y otros. Y es interesante observar con cuánta rapidez y aceleración se ha incrementado la aportación científica al arte de la construcción.

Seguramente se pierde en el amanecer de la humanidad la aplicación de la matemática a la construcción, porque no se comprende cómo hayan podido realizarse sin un mínimo de acerbo matemático y sin unos medios de representaión geométrica relativamente adelantados, muchas de aquellas obras cuya contemplación, todavía hoy, nos produce tanta admiración y otras de las que, sólo por referencias entrevemos la perfección de su traza y el arte con que fueron construidas sin dejar lugar a dudas, como aquel soberbio templo de Salomón, por no citar otros, cuyos enormes sillares y bien labradas maderas fueron preparados por los artífices del rey de Hiram con tan maravillosa técnica, que al llegar a Jerusalén encajaron unos en otros como por arte de magia, sin necesidad de relabra, ni martillo, ni herramienta alguna de hierro, hasta formar la fábrica completa del más digno edificio que conoció la Antigüedad. Pero es evidente que fuesen cuales fuesen los conocimientos científicos de los antiguos artífices de la piedra y la madera, nada representaban frente a lo que la ciencia ha aportado en poco más de un siglo para hacer posible el desarrollo de las nuevas técnicas del hierro y del hormigón armado.

Este formidable salto se ha debido en gran parte a la teoría de la elasticidad y se ha desarrollado todo él en torno y al amparo de esta teoría.

Corría el año 1660 cuando Hooke ideó aquella ley que hoy nos parece tan sencilla: «Ut tensio sic vis»; y presintiendo acaso en toda su magnitud el valor del hallazgo, tardó diez y seis años en publicarla y aún lo hizo bajo aquel anagrama «ceiiinosssttuu» que nos recuerda el oscuro encanto de la alquimia medieval.

Galileo había planteado en 1638 el problema de la resistencia de las barras o piezas prismáticas alargadas; pero sin pensar en establecer ninguna hipótesis análoga entre tensión y deformación. Tampoco parece que Hooke intentase sacar partido de su ley para el estudio del problema de Galileo; Mariotte, casi sumultáneamente (1680), intuye el problema de la flexión y da lugar a que los Bernouilli y Euler desarrollen sus conocidas teorías sobre la flexión y compresión de las barras y la forma de la elástica. Por fin, Coulomb (1776), es decir, un siglo después de Hooke, deja sentada la clásica ley plana de la deformación y de la tensión y, con ello, las bases de la vieja y elemental teoría de la resistencia de materiales, considerando inclusive el esfuerzo cortante, pero sin considerar la consiguiente deformación.

En la primera mitad del siglo XIX suenan nombres tan conocidos todavía hoy como los de Poisson, Navier, Cauchy, Green, Stokes, Young. Puede decirse que es al empezar la tercera década del siglo cuando se plantean las bases de la teoría de la elasticidad en tres dimensiones con la ley de Hooke generalizada. Las memorias de Navier, de Cauchy y de Poisson dejaron en realidad claramente establecidos los conceptos fundamentales de la teoría de la elasticidad; y Green, muy poco después, introdujo, ya como básicos, los principios energéticos tan elegantes como fecundos en esta rama de la Ciencia.

En el tercer cuarto de siglo o poco más, se resuelven los problemas de reparto de tensiones por cargas concentradas en la superficie del sólido, con los estudios de Betti, Lord Kelvin, Boussinesq, Cerrutti y Hertz. Es la misma época en que se descubren las funciones de Airy y de Maxwell y en la que Saint Venant, en 1855, resuelve satisfactoria y definitivamente el problema de la pieza prismática, incorporando, por así decir, la resistencia de materiales a la teoría de la elasticidad.

Mientras tanto, los nuevos inventos del vapor y del acero extendían por doquier las redes de sus ferrocarriles; los recientes cuerpos de obras públicas construían sus carreteras, peuntes y viaductos, con la intensidad de los mejores tiempos romanos, y la creciente densidad de las capitales obligaba a aumentar la altura y las cargas de las edificaciones, al mismo tiempo que aparecían las grandes naves de tipo industrial.

Se empezaba a sentir la apremiante necesidad de aplicar una teoría que permitiera racionalizar las estructuras y hacerlas más económicamente; sobre todo, las formadas por piezas prismáticas enlazadas en los diferentes tipos de celosías que aquellos hombres habían ido creando, con genial intuición, al formidable empuje de las nuevas necesidades.

Pero ellas mismas no hubieran podido ni siquiera plantearse sin la iniciación de los adelantos siderúrgicos; y, a su vez, aquéllas impulsaban éstos con acuciante impetuosidad, pues ya se había construido en 1808 un arco de fundición, en 1824 uno de perfiles laminados y en 1828 el colgante de Viena.

Precisamente en aquel año de 1855, en que Saint Venant resuelve el problema de la pieza prismática, es cuando se vierte la primera lingotada de acero Bessermer y, poco después, la Martín-Siemens; con ello se desencadena la catarata incohercible de las construcciones metálicas que a los pocos años construye el puente de Forth con sus dos luces y 500 metros, apenas superadas hoy en este tipo de estructura, y culmina en la célebre cubierta de la sala de máquinas de la Exposición de París y en la torre Eiffel, que lanza la maraña graciosa de sus celosías a 300 metros de altura en soberbio y genial desafío al peso y al viento.

Por su parte, el hormigón armado hace su aparición y desarrolla rapidísimamente la técnica de sus estructuras. También en ese mismo año de 1855 aparece el cemento Portland; en realidad, con los cementos naturales anteriores, ya se había pensado en colocar en su interior alambres o armaduras que sirvieran para darle mayor resistencia a tracción, y, cinco años antes, había llegado a navegar por algún estanque o río tranquilo el bote construido por Lambot. Inmediatamente empiezan a aparecer patentes como las de Coignet, Monier y Hennebique; todas ellas de hombres prácticos que dan la idea y crean el material sin conocer todavía sus leyes. Hasta 1894 no aparece la obra de Bauschinger sobre hormigón armado. En 1899 Considere hace sus interesantes publicaciones, y por aquella misma época, aparecen las obras clásicas de Melan, Möller, Wunsch, Emperger, etc. Es, en definitiva, la obra presente del hormigón armado con su teoría completamente desarrollada y pujante sobre las bases clásicas de la resistencia de materiales aplicadas al sólido heterogéneo hormigón-hierro.

¿Qué había ocurrido?

Ello es bien digno de señalar. La teoría había sido creada por hombres de ciencia con poca o ninguna concomitancia con la técnica de la costrucción; hombres que discutieron, por ejemplo, largamente sobre la elección de una elasticidad rariconstante o una multiconstante; que buscaron las razones físicas de la elasticidad partiendo de la teoría molecular y de las leyes newtonianas y que, mientras tanto, se interesaron bien poco o nada por los problemas prácticos.

Por otra parte, los técnicos, con sus maderas primero, sus frágiles fundiciones después, con sus hierros forjados y laminados, y su hormigón armado por último, presentían las enormes posibilidades de las estructuras trianguladas y porticadas e ideaban continuamente nuevos tipos de celosías y entramados. Con unos conocimientos rudimentarios de mecánica racional, a veces sin ninguno, iban creando los esquemas estructurales actuales y lanzaban sus pequeños ferrocarriles sobre ellos, aprendiendo casi totalmente lo mucho que les enseñaban sus propios desastres.

Este apredizaje, este campo que ellos mismos iban abriéndose y las posibilidades cada día mayores que la industria metalúrgica les iba proporcionando, les impulsaba a buscar en la ciencia la justa proporción y eficacia de sus estructuras. Si bien se mira, todas ellas podían calcularse con sobrada aproximación mediante unos polígonos funiculares y, con la entonces ya vieja teoría de Coulomb, para determinar la tensión máxima en sus barras o vigas. El hormigón armado, por su monolitismo, requería ciertamente algo más de teoría hiperestática, pero todo ello podía obtenerse arrancando de las mismas bases en sólido heterogéneo y aplicando el viejo teorema de Clapeyron. Todo existía, e incluso la teoría de la elasticidad había ido mucho más allá; sin embargo, apenas se utilizaba; pero el científico y el técnico, que hasta entonces habían marchado por separado, acabaron por mirarse. Quizá el científico se asombraba de las obras del técnico, y éste, a su vez, comprendía mejor que nadie la necesidad de salir de su ignorancia para seguir avanzando por el camino emprendido y realizar sus sueños queridos. Sin embargo, aquellas teorías maravillosas resultaban demasiado complicadas y abstrusas para ser empleadas por el constructor del XIX.

Fue necesario, de una parte, elevar el nivel del técnico, crear las escuelas de ingeniería y hacer más científica y matemática su enseñanza. Es la época de Perronet.

Por otra parte, la teoría tuvo que buscar también caminos más fáciles de aplicación, aun a trueque de perder en exactitud y profundidad; y se recurrió a soluciones, no rigurosas, como las de Grashof, por ejemplo, para desarrollar con sus bases propias los métodos actuales de resistencia de materiales iso e hiper-estática, como el de Mohr, y los desarrollados en las obras clásicas de Müller-Breslau, Bresse, Weyrauch, Ritter, etc.

De esta feliz conjunción vive hoy todavía, y vivirá quizá mucho tiempo, la téncica corriente de las estructuras de construcción; pues, al mismo tiempo que los materiales, el acero laminado y el hormigón armado en este caso, han permitido el desarrollo de la nueva técnica, la teoría ha encontrado caminos suficientemente fáciles y cómodos para poder trabajar prácticamente con ellos.

Esta última condición es esencial; porque no es, como podría parecer a simple vista, una cuestión de comodidad o de pereza en el técnico: es una necesidad ineludible de resolver el problema planteado y de construir la obra en un plazo determinado y siempre corto.

Seguramente Cauchy se extrañaría sobremanera si viera cómo se ha generalizado y cómo continúa aplicándose hoy la mayor parte de su teoría, cuando las bases en que él la fundaba están totalmente abandonadas por la ciencia y sustituidas por las nuevas teorías de la constitución de la materia; porque al técnico puramente práctico no le interesa ir más allá en el por qué íntimo de sus hipótesis, sino, simplemente, disponer de unas que le permitan llegar rápidamente a resultados suficientemente aproximados a la realidad dentro del campo de aplicación en que él los va a emplear.

En este sentido la resistencia de materiales, y aun la teoría de la elasticidad, son utilísimas, porque las hipótesis se asemejan suficientemente a la realidad del material dentro de las condiciones normales de trabajo; y, al ser lineales las ecuaciones que ligan tensiones y deformaciones, resulta aplicable el principio de superposición de efectos, y los cálculos a que conducen, en la mayoría de los casos, son fáciles y breves; tanto, que los técnicos tienden con frecuencia a extrapolarlos incorrectamente a otros casos y materiales en los que esas hipótesis de la elasticiadad lineal se separan bien sensiblemente de las condiciones reales de los materiales.

Desde ciertos puntos de vista, poco parece lo que se ha hecho en el campo de las estructuras de construcción en los últimos cincuenta años si se compara con lo hecho en los cuarenta anteriores. El empleo de aceros especiales, el perfeccionamiento de los enlaces con el suo de los martillos pneumáticos para el roblonado y el más moderno y revolucionario de la soldadura eléctrica, la mayor rigidez de las estructuras y el abandono de ciertos tipos de celosía y triangulación, son poca cosa, en el campo de las estructuras metálicas, al lado de la creación y el empleo en grande de aquellos tipos de estructura y formas de trabajo que aún hoy seguimos considerando insustituibles. Y en hormigón armado, salvo los modernos pretensados y las grandes estructuras laminares, la técnica sigue siendo, más o menos, la misma de hace cuarenta años.

Por su lado, estas estructuras superficiales o laminares de hormigón armado se han desarrollado particularmente en el último decenio, también por disponerse a la vez del material y de la teoría apropiados.

También aquí vemos unas primeras teorías desarrolladas científicamente en el siglo pasado, pero de escasa aplicación en construcción con los materiales entonces existentes. En el campo de la elasticidad, ya Poisson y Cauchy, en 1828, habían redactado interesantes memorias sobre el problema de las vibraciones en placas planas; pero, en realidad, la teoría de placas puede considerarse arrancando de la memoria de Kirchhoff de 1850 en la que sentó su conocida hipótesis, que los trabajos de Aron y Lord Rayleigh utilizaron y completaron en lo que al régimen de vibración se refiere.

Arrancando de aquí, se fueron desarrollando los estudios de placas rectangulares, de tanta aplicación en hormigón armado, lo mismo apoyadas sobre marcos rígidos que sobre apoyos aislados o columnas con capitel. Para su resolución se utilizan corrientemente los desarrollos en serie de las cargas, para la más fácil resolución de la ecuación de Lagrange, a la que conducen; y no necesito recordar que una solución práctica y de aplicación cómoda y sencilla ha sido estudiada por D. Alfonso Peña.

De otra parte, el estudio de las membranas elásticas, sin resistencia teórica a la flexión, permite la construcción de elementos de mayores dimensiones, en general, que la placa plana. Conocidas son las soluciones y los métodos de cálculo sencillos de la membrana de revolución, de la cilíndrica y de la hiperbólica; y el más complicado del conoide, resuelto en España.

Pero las membrans encuentran limitado su campo de aplicación; pues, para que las hipótesis se cumplan y pueda establecerse el equilibrio elástico sin fenómenos de flexión, las condiciones de borde no son arbitrarias ni coinciden con las condiciones reales de la sustentación, salvo en determinados casos particulares.

Por esto, los grandes elementos superficiales no han sido posibles hasta que las modernas soluciones de láminas elásticas, con resistencia a flexión, han hecho su aparición.

La genial solución utilizada por Finsterwalder en la lámina cilíndrica o de teja sobre marcos rígidos en las directrices extremas y la esposición de Ekström sobre la lámina de revolución, entre otras muchas, han abierto ancho campo a estas estructuras, cuyos márgenes de aplicación han de aumentar todavía con la utilización de la mambrana heterogénea o rigidizada en uno o dos sentidos.

La presencia de flexiones con ejes, según las tangentes a la superficie media en este género de láminas, obliga, en muchos casos, a aumentar el espesor y el peso por fuera de lo prácticamente conveniente o posible, y esa misma necesidad de aligerar cada vez más las construcciones para resolver los nuevos problemas que se nos plantean, me hizo pensar, como di cuenta el año pasado en la Real Academia de Ciencias de Barcelona, en la posibilidad de hacer desaparecer las flexiones laminares alterando sus condiciones en los bordes mediante la introducción en ellos de armaduras pretensas y hormigonadas posteriormente al resto de la lámina. Mediante la moderna técnica de los pretensados es fácil producir este efecto en muchos casos, al menos para la condiciones normales de trabajo de la lámina, y dar realidad práctica a dislocaciones de los tipos estudiados por Volterra o Somigliana y a una variedad de estados de auto-tensión que, al superponerse al estado producido por la carga, determinan formas de trabajo más apropiadas con la consiguiente economía y aumento de posibilidades. El campo de estas estructuras ha de extenderse todavía mucho, tanto en cuanto a su realización práctica, como en lo referente a su estudio teórico y métodos de cálculo; y los recientes trabajos de Pucher sobre membranas, son una buena prueba de que esta rama está en pleno desarrollo.

Pero no podemos seguir hoy por esos caminos trillados que trabajosamente lograron enseñarnos los sabios de ayer. El deseo de mayores economías y la necesidad de alcanzar mayores luces en el campo de la construcción civil y la de aligerar al límite las de tipo mecánico, y más en particular todavía las de aviación, obligan a considerar estados de equilibrio y resistencia, considerados antes absurdos o peligrosísimos y que, aún hoy, se toleran difícilmente en las grandes estructuras de construcción. Ciertamente se ha llegado a resultados insospechados ayer en las características resistentes y elásticas de los materiales; pero las exigencias crecen más aceleradamente todavía. Para ciertas estructuras, como las del avión, la aproximación hacia las condiciones de peligro, rotura y desastre es, aun con los materiales actuales, cuestión de vida o muerte, de ser o no ser.

Así, pues, es necesario afinar las teorías, aproximarse a las condiciones de inestabilidad, agotar y hasta sobrepasar los límites elásticos, estrujar al límite los coeficientes de seguridad. En construcción, la apremiate falta de hierro ha inducido ya a algunos organismos de nuestro país, a bajar el coeficiente de seguridad bien por bajo de dos en un momento en que los materiales presentan frecuentemente defectos alarmantes. Y en otros tipos de estructura, ciertamente más cuidados, se llega a mucho más. Es escalofriante pensar que hay aviones de guerra que trabajan con sólo el 1,08 de coeficiente de seguridad, y, en ciertos instantes, según parece, se llega hasta bajar de uno respecto a las teorías elásticas clásicas para aprovechar posiciones de equilibrio más allá de las de primer pandeo, e inclusive para contar con el aumento de resistencia y límite elástico que presentan los materiales en condiciones brevísimas de carga.

Llegar a esto parece ciertamente una locura; y, sin embargo, al técnico se le piden continuamente y se le exigen con apremio y autoridad otras locuras todavía mayores; porque, al fin y al cabo, si él no las hace, la probabilidad que tenga el aviador de salir con vida del fuego enemigo será todavía menor.

En consecuencia, los centros y trabajos de experimentación se multiplican y amplían en proporciones de fantasía. Pero no basta; cada experiencia, cada ensayo no enseña más que un caso, un dato concreto. Sólo la teoría, afianzándose en ellos, es capaz de enseñarnos algo más allá con carácter de generalidad; y hoy el técnico angustiado, suduroso y jadeante, llama con apremio a las puertas del templo de la ciencia y no se conforma con que los sabios estudien y discutan sus teorías y extiendan sus elucubraciones por los campos áridos de las abstracciones, mientras él lucha denonadamente con la realidad y ve agotarse sus armas; él necesita consecuencias prontas y determinadas.

Y en medio de tantas desgracias como vivimos y creamos, es quizá una más, y no despreciable, ésta de que cada vez dejemos menos científicos puros trabajando tranquilos por un campo en el que no se atisben aplicaciones directas; porque en cuanto se entrevé una, ya no se le deja vivir y se le obliga a poner todas sus facultades en obligada tensión y orientación fija, como un soldado o un esclavo más de esta vorágine que nos devora sin que sepamos adonde nos lleva ni tan siquiera para qué la pusimos en marcha.

Ciertamente en el campo de las construcciones fijas la evolución es un poco más lenta; y, desde luego, resultaría más agradecida si la aviación no se dedicase a destruirlas, antes de tiempo, con catástrofes apocalípticas. Pero aun así y todo, los que vivimos esa ténica vemos con admiración y espanto, que, para avanzar, para aprovechar más los materiales, para competir y seguir a tono la marcha inevitable del progreso con su cortejo de complicaciones, se necesita salirse de la elasticidad clásica. Para el técnico esto resulta abrumador, porque representa tener que emplear teorías y métodos enormemente más complicados y prolijos, casi siempre con una premura de tiempo y una carga de responsabilidad que, unidas, constituyen la carga maldita que pesa sobre el ingniero y la que, por eso mismo, valora y magnifica a la vez la grandeza de su empeño y el valor de su misión.

En efecto, otras teorías se han ido desarrollando y en este afán de hoy se emplean con avidez.

Así, por ejemplo, la teoría desarrollada por la escuela de Trefftz, que considera las deformaciones como función, no sólo de las derivadas primeras de los recorridos, sino también de derivadas de orden superior de los mismos, permite, por su completa generalidad, estudiar los casos de inestabilidad elástica más allá del primer pandeo o pandeo euleriano y ha encontrado equilibrios estables posteriores y soluciones prácticas muy útiles en la construcción, lo mismo para el caso de piezas prismáticas que de superficies, como el pandeo de alma en vigas llenas con o sin montantes de rigidización; y se puede aplicar también al caso de membranas y aun láminas curvas de simple o doble curvatura como las cúpulas.

Los cálculos a que conduce esta teoría son de gran complicación y de primera intención parecen inaplicables a los problemas prácticos; sin embargo, son muchos los casos en que a través de unos desarrollos teóricos de gran complicación matemática se puede llegar a fórmulas prácticas o tabulaciones o ábacos que permitan resolver el problema particuar que se plantee con gran facilidad.

Por otro lado, la teoría de la plasticidad representa bastante bien lo que le sucede al acero después de alcanzar su límite de fluencia; y hoy se calculan ciertos elementos metálicos de las estructuras teniendo en cuenta los aumentos de resistencia que pueden obtenerse de la utilización de este período postelástico cuando no han de intervenir fenómenos de fatiga.

Las teorías de Tresca y Navier, y las más modernas de Von Misses y Nadai, permiten hoy el estudio de la distribución de tensiones en estos cuerpos que, tras de un comportamiento sensiblemente elástico, pasan rápidamente al período plástico cuando el estado de tensión alcanza unos ciertos límites; y, Colonetti, ha generalizado a estos casos los principios energéticos del mínimo trabajo y de los trabajos virtuales desarrollando métodos de cálculo verdaderamente prácticos, tanto en el caso de estructuras lineales simples como en las múltiples y trianguladas.

En el hormigón, los fenómenos son todavía más complejos, porque como en todo pseudosólido se presentan deformaciones importantes que no se ajustan a la ley de Hooke y, en ciertos tipos de estructura, la tendencia plástica de estas deformaciones puede colocar la obra en condiciones desfavorables respecto a la teoría puramente elástica, sin serles tampoco aplicables las de la plasticidad perfecta.

Así, por ejemplo, en el caso de un arco importante y muy rebajado, la constracción de la directriz aumenta con el tiempo y, en consecuencia, aumenta el rebajamiento y se producen nuevos aumentos de la compresión y de la deformación; y, aumentando las deformaciones plásticas y rebajamientos más rápidamente que las compresiones, van colocando a la obra, cada vez más aceleradamente, en condiciones excesivas y peligrosas de trabajo.

En las construcciones laminares, es hoy corriente llegar a esbelteces de quinientos y aún del seiscientosavo y esta carrera de espesores mínimos se limita por las condiciones de pandeo o inestabilidad; pero, según se ha visto, es el comportamiento, dijéramos semiplástico, del hormigón el que hace que esta inestabilidad sea más grave, y, por consiguiente, será necesario complicar la teoría de la inestabilidad elástica para poder partir de hipótesis anelásticas que se ajusten mejor a las características propias y al comportamiento real del hormigón.

Las complicaciones de cálculo a que todo esto obliga y que los nuevos recursos de los procesos matemáticos hacen posible es tal, que se ha planteado repetidamente la duda de si estas teorías tan complicadas pueden estar justificadas en el campo real de la construcción; es decir, si el afinamiento que llevan consigo responderá verdaderamente al fenómeno real que se presente con los materiales de que se dispone, y se ha dejado traslucir algo así como la pregunta no siempre ingenua, de si los materiales conocerán realmente esas teorías tan complicadas y sabrán cumplir las obligaciones que de ellas se deriven; y creo que interesa aclarar bien que esta duda es verdaderamente fundada en lo que a las hipótesis en sí se refiere; pero, en modo alguno, a la mayor o menor complicación del proceso matemático que de ellas sea necesario derivar para llegar a los resultados.

Si se parte de la hipótesis de elasticidad lineal perfecta y el material no las cumple, es evidente que, en general, los resultados no corresponderán con la realidad. Pero si las leyes que rigen el comportamiento del material coinciden con las tomadas como punto de partida para la resolución del problema, el resultado final que se obtenga corresponderá a la solución real, lo mismo si el proceso matemático que conduzca de las hipótesis a los resultados es sencillo que si es complicado, tanto si el problema plantea una simple ecuación lineal, como un complejo sistema de ecuaciones diferenciales; si la solución satisface este sistema, a nadie se le ocurrirá pensar que la bondad y exactitud del resultado pueda ponerse en duda porque, para llegar a él, haya sido necesario utilizar unos recursos matemáticos más o menos abstrusos.

Pero el verdadero problema para el técnico está no sólo en encontrar un método de cálculo que, fundado en leyes a las que verdaderamente responde la naturaleza, le conduzca a un resultado eficaz; sino que, además, le permita llegar a él con la necesaria rapidez y con la más completa seguridad, eliminando las probabilidades de error.

Indudablemente, en todo cálculo existe el peligro, tanto mayor cuanto más prolijo es, de un error oculto que no se encuentre ni siquiera en repetidas y concienzudas comprobaciones. Por eso es conveniente tener algún sistema para comprobar que la solución a que se llega satisface efectivamente el problema inicialmente planteado y poder así detectar la presencia de un error o equivocación a corregir; y si el cálculo no tiene estos defectos, su mayor o menor complicación no restará ningún valor a sus resultados.

El técnico necesita, pues, métodos de cálculo que le permitan comprobar la resistencia de sus estructuras con suficiente comodidad y rapidez para cumplir su misión; pero, cuando estos métodos rápidos no existen, no tiene más remedio que aceptar la complicación de cálculo que sea, si no puede recurrir a métodos experimentales de comprobación para llegar a la meta que se le impone. De ningún modo puede rehuir el problema alegando que aquella complicación puramente de mecánica operatoria haya de desvirtuar el fenómeno real, porque como decía Leonardo de Vinci, en la técnica, «los que censuran la suma exactitud de las matemáticas se contentan con ilusiones» y «no existe certidumbre donde no pueda aplicarse alguna de ellas».

Por ello la técnica actual de la construcción, a medida que se va proponiendo problemas más difíciles y que trata de afinar más, necesita por una parte mejorar sus medios de investigación para determinar hasta los menores detalles las características físicas y el comportamiento mecánico de los materiales que emplea; y, por otra parte, ha de ir aceptando, forzosamente, mayores complicaciones teóricas y nuevos recursos matemáticos.

Antiguamente, la construcción de una obra no requería prácticamente cálculo ninguno; hoy, ciertos proyectos requieren con frecuencia cientos de páginas de cálculos. Hace poco, teniendo que proyectar un viaducto en sustitución de otro construido hacía cincuenta años, tuve la curiosidad de mirar el proyecto primitivo, y me quedé ingenuamente sorprendido al ver que todo su cálculo estaba escrito en perfecta letra inglesa en folio y medio de papel; el nuevo proyecto que yo estudié llevaba ya unas ciento cuarenta páginas a máquina de cálculos y comprobaciones; y ¡quién sabe dentro de otros cincuenta años cuál será el procedimiento de comprobación y a qué límites de complicación y afinamiento se llegará, para la construcción de una obra analóga!

Veamos en este sentido lo que ocurre en el caso del hormigón armado.

En sus primeros tiempos, cuando se formaba su técnica y se modelaban sus métodos de cálculo, se hicieron las primeras investigaciones necesarias para comprobar si el material se amoldaba con suficiente aproximación a las hipótesis o leyes elásticas; y si se analizan cuidadosamente los datos obtenidos por aquellos investigadores y los que prepararon la misma instrucción francesa para construcciones de hormigón armado, de 1906, se pueden apreciar ya algunas deformaciones no elásticas y ciertas divergencias respecto a lo que la teoría exigía en sus hipótesis. Sin embargo, la necesidad obligaba a ir rápidamente. Era necesario construir, y quizá se dio un poco de lado a algunas de estas divergencias, en el buen deseo de poder aplicar al hormigón armado la siempre maravillosa y atrayente teoría de la elasticidad lineal, y más en particular, la de la resistencia de materiales, que entonces constituía la máxima perfección ténica y la máxima complicación admisible de cálculo, muy superior indudablemente a la que hasta entonces se había empleado.

Efectivamente, la resistencia de materiales es perfectamente aplicable al hormigón armado; y el conjunto enorme de construcciones hechas, de entonces acá, con el éxito que está a la vista de todos, es más que suficiente para justificar aquella elección.

No cabe duda que el historial y buen comportamiento de tantas construcciones corrientes, y aun de gran importancia, que se han proyectado con buena técnica y con amplio margen de estabilidad, avalan y aconsejan una continuidad en la trayectoria emprendida, y que las insustituibles ventajes que la hipótesis de Hooke y la de igualdad de deformaciones entre las armaduras y el hormigón continuo representan, haciendo posible el cálculo de las estructuras con comodidad y seguridad, hacen que la teoría clásica del hormigón armado continúe considerándose hoy establecida sobre firmes bases y con seguro porvenir.

Pero avanzando en la carrera emprendida de luces, esbelteces y cargas, se ha llegado a límites en los que las deformaciones no elásticas pueden ya producir fuertes recorridos y peligros de inestabilidad; se ha visto que el fenómeno se agrava peligrosamente con la influencia de estas deformaciones no elásticas y de estas divergencias de comportamiento entre el material y la teoría elástica. Precisamente este fenómeno, que amenaza con la ruina el puente de Allier, fue lo que llamó la atención de Frayssinet y le hizo estudiar a fondo la cuestión y desarrollar sus interesantísimas investigaciones sobre el tema, que hoy son conocidas de todos. Estos fenómenos, cuyo estudio arranca aproximadamente de 1928, han dado ya lugar en diferentes países a estudios experimentales y métodos de cálculo particularmente cuidados, como son los de Faber, Glandwille, Whitney, Dischinger, etc.

Aquí ya no se trata de disquisiciones diletantistas desarrolladas en la mesa de trabajo del hombre de ciencia y desligadas del problema práctico, sino que, por el contrario, parecen más bien teorías de visión parcial, simplistas o provisionales, desarrolladas rápidamente, sin mirar a sus fundamentos, de cara meramente al dato experimental y a la necesidad práctica que se le plantea al proyectista con toda la urgencia y la responsabilidad que lleva siempre consigo el problema de la gran construcción.

Y es que en el seno del hormigon se ocultan infinidad de elementos, rebeldes a la teoría de la elasticidad, pequeñísimas masas de agua, gas, micelas, cristales en crecimiento entrecruzando, por así decir, sus complejas leyes. Apenas sabemos, de todo ello, más que los efectos de conjunto que se producen en el material, y estos afectos son de tan varios orígenes, dependen de tantas variables y son tan diferentes de unos hormigones a otros, que parece difícil llegar a establecer sus leyes y discriminar sus causas.

Se observa que su coeficiente de dilatación térmico no es el mismo que el del hierro, y que, por otra parte, el hormigón sufre retracciones y deformaciones higroscópicas que desconoce su compañero metálico; ello conduce a la creación de esfuerzos internos parásitos o autotensiones importantes que han sido investigadas experimentalmente y estudiadas desde un punto de vista teórico, con gran extensión y acierto, por diferentes autores, entre los que es justo citar a Caquot, quien ha obtenido importantes deducciones sobre los fenómenos de microfisuración interna, de deformación y deslizamiento finito entre el hormigón y la armadura.

Pero, aparte de todo esto y con más importancia que ello, se observan otros fenómenos anómalos en el comportamiento del hormigón bajo la acción de las cargas o esfuerzos permanentes.

Por otra parte, si se somete una probeta prismática, de suficiente longitud respecto a su sección transversal, a compresión axil, y se dibujan en un diagrama los puntos que ligan la tensión con la deformación, este diagrama, bajo la acción de cargas inferiores a las alcanzadas anteriormente, es relativamente asimilable a una recta, aun cuando presenta, como es lógico en esta clase de materiales, estrechos ciclos de histéresis; pero, durante la primera puesta en carga, o para valores de ella superiores a los ya alcanzados anteriormente, el diagrama es acusadamente curvilíneo, con concavidad hacia el eje de las deformaciones y con curvatura creciente a medida que se aproxima la compresión a la carga máxima de rotura del material; y no hay que decir que no es posible llegar a las condiciones del diagrama rectilíneo sin haber pasado primeramente por las correspondientes a esta primera carga; aparte de que son muchas las construcciones en que el peso propio tiene una importancia fundamental y no se aplica más que una sola vez, en el momento del descimbramiento, para continuar actuando después constante e indefinidamente.

Ciertamente, en el primer trozo del diagrama, para cargas bajas, la curva puede asimilarse a la tangente o a una secante y admitir, en esta forma, la ley de Hooke o de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones; pero esto no será admisible cuando se quieren estudiar las condiciones de resistencia del material en estados próximos a la rotura o en aquellos otros en que se quiere trabajar a cargas relativamente altas, y menos cuando haya peligro de que estas cargas se produzcan por fenómenos de inestabilidad.

Por otra parte, desde las primeras investigaciones sobre el comportamiento del hormigón armado, se viene observando que éste presenta inexorablemente resistencias menores a comprensión simple o axil que a compresión por flexión de las fibras extremas más comprimidas. Claro está, que este fenómeno no puede observarse más que con cuantías suficientemente fuertes para producir la rotura del hormigón por compresión antes que la de la armadura por tracción. En estos casos la diferencia de resistencias es muy importante. Me refiero, naturalmente, a la resistencia teórica, es decir, a la carga de trabajo que se obtiene por la aplicación de la teoría clásica de la elasticidad lineal, o, lo que en este caso es prácticamente igual, por la teoría de la resistencia de materiales partiendo de la hipótesis de Coulomb. Tanto es esto así, que es corriente admitir en las normas de cálculo del hormigón armado, una resistencia mayor del hormigón a flexión que a compresión simple sin ninguna justificación teórica; es decir, sin tratar de explicarse el por qué de fenómeno tan anómalo que claramente delata un defecto en las hipótesis admitidas.

Varios autores han señalado que el fenómeno puede ser debido a que la ley de reparto de tensiones a lo largo de la sección sometida a flexión no sea lineal; particularmente Schreyer ha hecho el estudio admitiendo una ley de reparto hiperbólica en la zona de compresión y ha llegado a resultados mucho más amoldados a la realidad que con la hipótesis lineal. Más conocida es quizá la solución adoptada por Emperger y Saliger, quienes consideran una ley trapecial consistente en cortar la ley triangular de la hipótesis clásica por una paralela a la base, determinada por la resistencia o carga de rotura o compresión simple del hormigón. Salvo el estudio de Schreyer, no se ha buscado una justificación a estas leyes, o, por mejor decir, no se ha tratado de ligarla con el diagrama tensión-deformación en compresión simple como parece lógico. Tampoco parece justificado el diagrama hiperbólico de Schreyer ni su asimilación al rectángulo envolvente, ya que este diagrama se dedujo de una escasa experimentación en probetas de poca longitud, no sometidas, por consiguiente, a verdadera compresión simple a causa del efecto perturbador de la coacción establecida por las superficies de aplicación de la carga.

Todo ello hace pensar en la posibilidad de estudiar el comportamiento a flexión de la pieza partiendo del diagrama real tensión-deformación obtenido en compresión simple, aun cuando para ello se presente alguna dificultad especial; en realidad, el problema debería considerarse como una ampliación o generalización del problema de Saint Venant partiendo de las nuevas relaciones, no lineales, entre tensiones y deformaciones; pero atacar el problema así, en toda su generalidad y complicación requiere, en primer lugar, conocer o admitir determinadas leyes entre tensiones y deformaciones en el caso general de solicitación triple del material. Aun suponiendo conocidas experimentalmente estas leyes, para lo que se requería completar las experimentaciones hechas (como las de Röss, entre otras), es claro que el planteamiento del problema sería de una complicación que considero inabordable hoy por hoy; por otra parte, si en la técnica actual se considera admisible y conveniente la simplificación de la teoría de Saint Venant, parece lógico buscar aquí hipótesis simplificadoras aun a trueque de perder generalidad en la solución, siempre que estas hipótesis sean aceptables y conduzcan a resultados concordantes con la experimentación en los casos de piezas prismáticas que interesan en la práctica.

Prescindiendo de la influencia de los esfuerzos cortantes para el cálculo de los longitudinales, como se hace corrientemente, o sea, tratando de estudiar con exactitud solamente el problema de la flexión pura en el que sólo aparecen tensiones normales en una sola dirección, podrá establecerse un método de determinación de las tensiones y las deformaciones en los distintos puntos de la pieza siempre que se admita una determinada ley entre las tensiones normales y las deformaciones longitudinales y otra ley de distribución de estas últimas dentro de la sección.

No disponiendo de una teoría que permita determinar esta segunda ley como consecuencia de las nuevas hipótesis sobre las características propias del material en lugar de las elásticas (pudiéramos decir al estilo de Saint Venant), es necesario recurrir a la experimentación para su establecimiento.

La hipótesis plana llega a no ser admisible en el caso de secciones espaciales tubulares, de grande ala, etc., pero para secciones compactas, las investigaciones hechas hasta la fecha parecen abonar en favor de ella, aun cuando al llegar a cargas altas en el hormigón se puedan producir, como parece haber observado experimentalmente Brandtzaheg, una ligera curvatura de la sección que tiende a disminuir la deformación en las fibras extremas. De todos moodos, la curvatura es pequeña y puede admitirse con sobrada aproximación a la deformación plana. Por otra parte, el admitir otra ley curva de deformación no representaría una gran complicación; y la variación, que puede introducir esta ligera curvatura de la sección, es mucho menor que la que representa la curvatura del diagrama tensión-deformación, siendo ésta mucho más acusada que aquélla en los casos que más interesan para este estudio, o sea, en aquellos en que hay realmente posibilidad de que el agotamiento resistente de la pieza se produzca por rotura a compresión del hormigón.

Queda, sin embargo, para arrancar y poder establecer una teoría con cierto carácter de generalidad, una dificultad, y es la variedad de diagramas tensión-deformación que se obtiene de unos hormigones a otros, y, en consecuencia, la variabilidad de lo que pudiera llamarse módulo de elasticidad instantáneo. No voy a extenderme en este tema en el que tan brillante aportación ha hecho D. Alfonos Peña, llegando a establecer un método de cálculo de la mayor elegancia y aplicación práctica para el cálculo y dimensionamiento de las piezas de hormigón armado, habida cuenta de la variación de este módulo de elasticidad de unos hormigones a otros.

La confrontación de algunas importantes series de ensayos de diferentes investigadores y la experiencia propia me hicieron pensar en la posibilidad de establecer un diagrama único tensión-deformación que sirviera para todo género de hormigones; y llegué a la conclusión de que podía establecerse una ley única, suficientemente aproximada dentro de los casos prácticos, siempre que se considerasen la tensión y la deformación relativas en lugar de las reales. En efecto, llamando tensión relativa al cociente de la tensión real H, o compresión unitaria en la pieza trabajando a compresión simple, por la resistencia o carga unitaria de rotura R del material para igual género de solicitación; llamando, a su vez, deformación relativa al cociente de la deformación actual o real en cada momento d, por la deformación D correspondiente a la carga máxima de rotura, y estableciendo el diagrama en estas coordenadas, se llega a obtener una ley prácticamente única; es decir, una ley aplicable con suficiente aproximación a todo género de hormigones.

Las experimentaciones de Walker-Stanton, Emperger, Saliger y otros encajan todos sus resultados, abarcando más de diez mil ensayos, dentro de una estrecha zona, alrededor de la ley única, con pequeña dispersión.

Parece que la ley más cómoda de manejo y que se aproxima mejor a la realidad de este tipo parabólico de la forma:

$$\left(1 - \frac{H}{R}\right) = \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)$$

Es decir, una parábola de grado *n* con vértice en el punto correspondiente a la carga máxima de rotura. El exponente *n* que se ajusta mejor a la experimentación es 2,33 y prácticamente todos los puntos o casos se acoplan entre valores de *n* comprendidos entre 1,8 y 2,7.

Seguramente un estudio más detallado de la cuestión permitirá establecer la variabilidad de *n* en función de las características del material, tales como calidad de árido, etc.; pero los errores que se obtienen adoptando un valor único del exponente n en los resultados del método que más adelante se desarrolla, son muy pequeños y, por consiguiente, se puede aceptar esta ley, a mi juicio, con carácter de generalidad y aproximación sobrada para todos los fines de la técnica práctica.

Incluso creo que puede considerarse incluido en esta ley el fenómeno llamado deformación lenta del hormigón; se trata de una deformación que se produce a lo largo del tiempo bajo la acción de las cargas permanentes. Esta deformación, destacada por primera vez por Freyssinet en Francia y por Faber en Inglaterra, es de carácter plástico en cuanto no se recupera o desaparece al retirar la carga ni parece producir tampoco fatiga o disminución de resistencia en el material, pero no sigue ni con mucho las leyes de la plasticidad perfecta, sino que tiende a estabilizarse y disminuir con el tiempo.

No es éste lugar para entrar en la difícil discusión sobre las causas físicas y químicas del fenómeno, en las que parece influir la eliminación por efecto de la compresión no ya sólo del agua libre intersticial, como propuso Freyssinet, sino más bien del agua coloidal y de la absorbida por el gel, unida probablemente a deslizamientos internos en los planos de cristalización. Las experimentaciones de que se dispoe se refieren casi exclusivamente a cargas unitarias bajas respecto a las de rotura, como corresponde a las tensiones normales de trabajo; y acusan, al cabo de tres o cuatro años, deformaciones tres y hasta cuatro veces superiores a las que se obtienen en los primeros momentos de aplicación de la carga. Por los experimentos hechos con cargas algo más elevadas, y en especial los de Davis, se ve que también aumentan con la compresión unitaria más rápidamente que ésta y que, por tanto, el diagrama tensión-deformación en períodos de cargas iguales y dentro de iguales edades del hormigón es curvo, analógamente al correspondiente a las cargas breves, hasta el punto de que varios experimentadores lo consideran proporcional a éste.

Admitiendo esto así, mientras nuevas experiencias con tensiones relativas más próximas a la unidad no den nuevos datos sobre ellas, resulta que la ley establecida anteriormente se mantiene también para las deformaciones lentas siempre que, al definir la tensión y la deformación relativas, se tomen como referencia o denominador los valores de la tensión y de la deformación de la rotura correspondientes a perídos de carga y edades del hormigón iguales o parecidas a las que se refieran las tensiones y deformaciones de trabajo.

En todo caso, si la experimentación demostrase que esta correlación no es exacta, podrían adoptarse valores del exponente n diferentes para el estudio del fenómeno en carga breve y en carga duradera.

Si quieren tenerse en cuenta, con mayor aproximación que la usual, todos los fenómenos resistentes que entran en el trabajo de la pieza prismática de hormigón armado, ha de considerarse también la resistencia a tracción el hormigón. La experimentación de que se dispone en tracción simple es más escasa y mucho más delicada que la del hormigón en compresión. Además sus leyes son totalmente diferentes cuando el hormigón está armado, que cuando no lo está, y varía también según la cuantía de armadura longitudinal de que se disponga. Ya Hennebique observaba que el hormigón se hace más dúctil cuando está armado; y esta mayor ductilidad, o deformabilidad sin agrietamiento a tracción, es tanto mayor cuanto más próximas están las armaduras en su seno. El fenómeno ha recibido especial atención en estos últimos años, con motivo del empleo de aceros de alto límite elástico para su empleo a fuertes tensiones dentro del hormigón.

Estableciendo también los diagramas tensión-deformación en valores relativos, como se ha indicado para el trabajo de compresión, y utilizando los datos proporcionados por el Oesterreichschen Eisenbeton Auschuss, se ve que los diagramas resultantes son más variables que en el caso de compresión, pero como esta resistencia es muy pequeña en relación a la de la compresión, la influencia de estos errores puede considerarse despreciable; por ello, para uniformidad del cálculo, parece admisible una ley media tal como ésta:

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{R}} = x\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^{n'} - x\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^{n''}$$

en la que J, δ son la tensión y la deformación a tracción, y R, Δ los mismos valores anteriores correspondientes a la máxima carga unitaria de rotura por compresión simple. Esta ley se centra bien en los diagramas que se deducen de la experimentación antes citada (dando a sus coeficientes los valores $\alpha = 0{,}166$; $n' = 1{,}33$; $n'' = 21{,}23$) y acusa claramente el fenómeno de ductilidad y pérdida paulatina de resistencia que se observa en el hormigón cuando la deformación aumenta excesivamente y el material se ve obligado por adherencia a seguir en sus alargamientos a una armadura bien dispuesta.

No tiene, por otra parte, esta expresión más valor que el de permitir el establecimiento de ecuaciones que den unos valores de la deformación utilizables para el estudio de las reacciones en sistemas hiperestáticos, con un grado de aproximación mayor que el que proporcionan los métodos corrientes de cálculo; pues, para la comprobación de la resistencia de secciones, se considera corrientemente preferible no tener en cuenta estas resistencias a tracción, ya que sus valores son relativamente aleatorios y a favor de la seguridad.

Por último, para el acero de construcción, como es bien sabido, el diagrama tensión-deformación está compuesto de una parte sensiblemente recta, cuya tangente define el módulo de elasticidad, y otra parte, que puede considerarse horizontal, y que marca el escalón de fluencia, siguiendo luego el período de estricción que ya no interesa al caso; entre las dos primeras partes rectas indicadas, aparece una pequeña zona curva de transición. Este diagrama podría asimilarse a una rama de hipérbola muy aguda con centro junto al punto de intersección de las dos alineaciones rectas indicadas anteriormente, y que arrancara, en el origen de tensión nula, tangente a la recta que define el módulo de elasticidad inicial; siendo prácticamente este módulo inicial constante, en todos los aceros de construcción, podrían fijarse los parámetros de esta hipérbola de forma que pasara sensiblemente horizontal por el escalón de fluencia correspondiente a cada tipo de acero. Este diagrama quizá pudiera interesar en piezas metálicas para el desarrollo de una teoría análoga a la que vamos a ver para el hormigón armado; pero, no parece interesar en este último caso, porque estas piezas, al aproximarse el escalón de fluencia en su armadura de tracción, sufren agrietamientos importantes que, no solamente alteran ya el régimen de trabajo normal, sino que las colocan fuera del campo admisible en la práctica, por los peligros de oxidación de la armadura al entrar la humedad ambiente en estas fisuras, cuando alcanzan ya una cierta abertura.

Por esta razón, parece preferible seguir admitiendo un diagrama discontinuo en el acero, igual al que han aplicado otros autores para el establecimiento y cálculo de piezas metálicas que entran por flexión en período plástico. Así, pues, se considerará solamente la primera rama del diagrama en el acero como recta hasta el escalón de fluencia, limitando el campo de trabajo de la pieza, al alcanzarse este límite.

Aceptando estas leyes para el estudio de las tensiones longitudinales con independencia de las cortantes, se puede desarrollar una teoría que, si bien es más complicada que la corriente, permite, sin embargo, llegar a valores, diagramas y fórmulas finales de utilidad práctica.

No voy a entretener vuestra atención con el problema técnico, sino exclusivamente con la posibilidad de desarrollo de la teoría en una forma general. Como se ha indicado antes, parece aconsejable partir de la hipótesis de deformación plana, puesto que la experimentación existente da valores sensiblemente correspondientes a esta ley. En todo caso, podría hacerse el estudio partiendo de una hipótesis de deformación curva fija, o, probablemente con más exactitud, con una curvatura variable, siguiendo una ley análoga a la que hemos establecido entre las tensiones y las deformaciones relativas; pero no pareciendo que la experimentación existente aconseje introducir esta nueva complicación, he partido de la hipótesis de deformación plana. Claro está que, admitida la ley fundamental anterior tensión-deformación, esto no provoca una ley de tensión plana como se deduce en elasticidad lineal en el problema de Saint Venant, sino que aparecerá forzosamente una ley de tensión curva y de forma y curvaturas variables según el grado de agotamiento o de tensión relativa del hormigón.

Por lo demás, considerando solamente los esfuerzos longitudinales como en el caso flexión pura o en los asimilables a él, no es necesario establecer nuevas peticiones de principio para desarrollar las ecuaciones de equilibrio con arreglo a las bases de la mecánica racional, y lo mismo sucede en el campo de la compresión axil y en el compuesto de compresión y flexión; es decir, de flexión o compresión compuestas.

De todo lo anteriormente expuesto se deduce que para el establecimiento de este método de cálculo de los esfuerzos longitudinales en una pieza de hormigón armado sometida a flexión o compresión compuestas, puede partirse de las cuatro bases experimentales siguientes:

1.º Mantenimiento de las secciones planas durante la deformación.

2.º Ley fundamental entre la tensión y la deformación relativas en el hormigón a compresión:

$$\left(1-\frac{H}{R}\right)=\left(1-\frac{\delta}{\Delta}\right)^{n} \text{ o bien } (1-h)=(1-\eta)^{n}$$

en la que H es la tensión en el hormigón; R la de rotura a compresión simple; d la deformación correspondiente a H; Øla deformación de rotura; $h=\frac{H}{R}$ la tensión relativa; $\eta=\frac{\delta}{\Delta}$ la deformación relativa; y n un exponente de valor constante que fijado en 2,33, encaja suficientemente las diferentes experimentaciones.

3.º Como ley aproximada en la zona de hormigón sometido a tracción en sección armada:

$$\frac{J}{R}=x\left(1-\frac{\delta}{\Delta}\right)^{n'}-x\left(1-\frac{\delta}{\Delta}\right)^{n''} \text{ o bien}$$

$$j=x\,(1-\eta)^{n'}-x\,(1-\eta)^{n''}$$

en donde *x, n', n''*, son constantes que pueden fijarse, como primera y suficiente aproximación, en 0,116, 1,33 y 21,33 respectivamente. J es la tensión a tracción en el hormigón; $j=\frac{J}{R}$; y η, R, los mismos valores indicados anteriormente.

4.º El módulo de elasticidad E del acero, lo mismo a tracción que a compresión, se supone constante hasta un cierto límite L y nulo a partir de este valor dentro de la zona de compresión única en que puede interesar.

Partiendo de estas bases pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

En el caso de flexión compuesta, es decir, con compresiones y tracciones dentro de la sección, y partiendo de estas leyes en lugar de las clásicas de Navier, se pueden establecer igualmente las dos conocidas ecuaciones de equilibrio entre la resultante de las tensiones y la fuerza exterior N normal a la sección y aplicada a una distancia e del punto medio del canto.

Estas ecuaciones son:

$$N = \int_0^g b_z \cdot H_z \cdot dz - \int_0^{f-g} b_z \cdot J_z \cdot dz + A_a \cdot a - A_s - s$$

$$N\,e + N\left(g - \frac{d}{2}\right) = \int_0^g b_z \cdot H_z \cdot z \cdot dz + \int_0^{f-g} b_z \cdot J_z \cdot z \cdot dz +$$

$$A_a \cdot a\,(g - A_s - r_a) + A_s \cdot s\,(d - g - r_s)$$

en las que a es la armadura de compresión, s la de tracción, A_a, A_s sus respectivas tensiones (en valor absoluto) $r_a \cdot r_s$; los recubrimientos respectivos, b_z el ancho de la fibra z, g la distancia de la fibra extrema más comprimida al plano neutro, d el canto total, N la carga axil total, y e su distancia al punto medio de la sección o mitad del canto.

Llamando R la resistencia confiable del hormigón (para la que pueden tomarse los dos tercios de la media a compresión simple obtenida por ensayos, al objeto de igualar los coeficientes de seguridad a aplicar después al hormigón y al acero), siendo b un cierto ancho medio y dividiendo la primera ecuación por $b\,d$ R, la segunda por $b\,d^2$ R y haciendo $\zeta_n = \frac{z}{c}$, las dos ecuaciones anteriores toman la forma:

$$\frac{N}{bdR} = \frac{1}{b}\int_0^{g/d} b_z \cdot h_z\, d\zeta_z - \int_0^{1-g/d} b_z \cdot J_z \cdot d\zeta_z\, dz + \frac{A_a}{L} \cdot \frac{aL}{bdR} - \frac{A_s}{L} \cdot \frac{sL}{bdR}$$

$$\frac{Ne}{bdR} + \frac{N}{bdR}\left(\frac{g}{d} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{b}\int_0^{1-g/d} b_z \cdot h_z \cdot \zeta_z \cdot d\zeta_z +$$

$$+ \frac{1}{b}\int_0^{1-g/d} b_z \cdot j_z \cdot \zeta_z \cdot d\zeta_z + \frac{A_a}{L} \cdot \frac{aL}{bdR}\left(\frac{g}{d} - \frac{r_a}{d}\right) +$$

$$+ \frac{A_s}{L} \cdot \frac{sL}{bdR}\left(1 - \frac{g}{d} - \frac{r_s}{d}\right)$$

Por último, adoptando los símbolos siguientes:

$P = \frac{N}{bdR}$ que llamaremos coeficiente de compresión o simplemente *compresor*.

$F = \frac{Ne}{bd^2R}$ Coeficiente flexor o simplemente *flexor*.

$u_a = \frac{aL}{bdR}$ Cuantía característica de compresión o *característica adicional.*

$u_s = \frac{sL}{bdR}$ Cuantía característica de tracción o *característica básica.*

$$\frac{g}{d} = r;\quad \frac{r_a}{d} = \rho_a;\quad \frac{r_a}{d}$$

$$T = \frac{1}{\gamma b}\int_0^{1-g/d} b_z \cdot h_z \cdot d\zeta_z$$

$$W = \frac{1}{\gamma b}\int_0^{1-g/d} b_z \cdot j_z \cdot d\zeta_z$$

$$U = \frac{1}{\gamma b}\int_0^{g/d} b_z \cdot h_z \cdot \zeta_z \cdot d\zeta_z$$

$$Z = \frac{1}{\gamma b}\int_0^{1-g/d} b_z \cdot j_z \cdot \zeta_z \cdot d\zeta_z$$

cuyas expresiones desarrollaremos más adelante.

las ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$O = \gamma\,(T) - \gamma\,(W) + \left(\frac{A_a}{L}\right) = u_a - \left(\frac{A_s}{L}\right) u_s$$

$$F = P\left(\frac{d}{2} - \gamma\right) + \gamma^2\,(U) + \gamma^2\,(Z) + \left(\frac{A_a}{L}\right) u_a\,(\gamma - \rho_a) +$$

$$+ \left(\frac{A_a}{L}\right) u_s\,(t - \gamma - \rho_s)$$

Para determinar los seis valores entre paréntesis, puede operarse en la siguiente forma:

Sea a el giro que corresponde a una longitud de pieza igual al canto *d* de tal modo que:

$$\alpha = \frac{\delta_z \cdot d}{z}$$

siendo d_z la deformación longitudinal o normal a la sección. Haciendo:

$$\beta = \frac{\alpha}{\Delta}\varnothing;\ \eta_z = \frac{\delta_z}{\Delta}\varnothing$$

se tiene:

$$\frac{\alpha_z \cdot z}{\Delta \cdot d} = \beta\,\frac{z}{d} = \frac{\delta_z}{\Delta} = \eta_z = \beta\zeta_z$$

que introducida en las leyes de tensión-deformación establecidas da:

$$h_z = 1 - (1\ \beta\zeta_z)^n$$

$$j_z = x\,[(1 - \beta\zeta_z) - (1\ \beta\zeta_z)\ ]$$

Introduciendo estos valores en las expresiones de TUWZ, siempre que el ancho b_z sea expresable analíticamente en función de $\frac{z}{d} = \zeta_z$ pueden obtenerse las expresiones de estas funciones en función de β y ζ_z e integrando quedan en función β y γ. En todo caso puede hacerse la integración gráficamente.

En el caso más corriente de ancho constante o sección rectangular se obtienen las fórmulas y resultados siguientes:

Introduciendo los valores de *h*, *j* y $\phi = \beta\gamma$, integrando y haciendo operaciones, queda:

$$T = \frac{1}{\gamma}\int_o^{\gamma} h_z \cdot d\zeta_z = \frac{1}{\gamma}\left[1 - (1 - \beta\zeta_z)^{n'}\right] d\zeta_z = 1 - \frac{1 - (1 - \phi)^{n+1}}{(n+1)\,\phi}$$

$$U = \frac{1}{\gamma^2}\int_o^{\gamma} h_z \cdot \zeta_z \cdot d\zeta_z = \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2}\int_o^{\gamma} (1 - \beta\zeta_z)^n\ \zeta_z \cdot d\zeta_z$$

Y como

$$d\zeta_z = \frac{1 - (1 - \beta\zeta_z)}{\beta}$$

se tiene

$$d\zeta_z = \frac{d\,(1 - \beta\zeta_z)}{\beta}$$

y queda:

$$U = \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma^2}\int_o^{\gamma} \frac{1 - (1 - \beta\zeta_z)}{\beta}\,(1 - \beta\zeta_z)^n\,\frac{d\,(1 - \beta\zeta_z)}{\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\phi^2}\left[\frac{1 - (1 - \phi)^{n+2}}{n+2} - \frac{1 - (1 - \phi)^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$W = \frac{1}{\gamma}$$

$$\int_o j_z \cdot d\zeta_z - \frac{x}{\phi}\left[\frac{1 - \left(1 - \frac{\phi}{\gamma}\right)^{n'+1}}{n'+2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1 - \left(1 - \frac{\phi}{\gamma}\right)^{n''+1}}{n''+1}\right]$$

$$Z = \frac{1}{\gamma^2}\int_o^{1-\gamma} j_z \cdot d\zeta_z = \frac{x}{\phi^2}\left\{\frac{1 - \left(1 - \frac{\phi}{\gamma}\right)^{n''+1}}{n'+1} - \right.$$

$$- \frac{1 - \left(1 - \frac{\phi}{\gamma} + \phi\right)^{n''+1}}{n'+2} + \frac{1 - \left(1 - \frac{\phi}{\gamma} + \phi\right)^{n'+2}}{n'+2}$$

$$- \frac{1 - \left(1 - \frac{\phi}{\gamma} + \phi\right)^{n'+1}}{n'+1} +$$

$$+ \frac{1}{(n''+2)\,(n''+2)} + \frac{1}{(n'+2)\,(n'+2)}$$

expresiones en las que ha de hacerse:

$n = 2{,}33 \quad n' = 1{,}33 \quad n'' = 2{,}33 \quad x = 0{,}116$

Por último, las expresiones $\frac{A_a}{L}$ $\frac{A_s}{L}$ se deducen inmediatamente por las conocidas relaciones geométricas que dan

$$\frac{A_\alpha}{L} \cdot \frac{1}{L} \cdot E\,\delta_{(g - r_\alpha)}\ \frac{E\,\delta_g}{L} - \frac{(g - r_a)}{d} =$$

$$= \frac{E-\alpha}{L} \cdot \frac{g}{d} \left(1 - \frac{r_a}{d} \cdot \frac{d}{g}\right) = \beta\,\gamma \left(1 - \frac{\rho_\alpha}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L}$$

$$\frac{A_s}{L} \cdot \frac{1}{L} \cdot E\,\delta_{(d-g-rs)} \frac{E\,\delta_g}{L} - \left(\frac{\delta - g - r_a}{d}\right) =$$

$$= \beta\,\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma} - 1\right) \frac{E\,\Delta}{L}$$

Con todo ello, las ecuaciones de equilibrio se reducen fácilmente a:

$$P = T\,\gamma - W \cdot \gamma + u_\alpha \left[\phi\left(1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L} \lesseqgtr 1\right] -$$

$$u_s \left[\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L} \lesseqgtr 1\right]$$

$$F = P\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + U \cdot \gamma^2 + Z \cdot \gamma^2 + u_\alpha \left[\phi\left(1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L} \lesseqgtr 1\right] (\gamma - \rho_\alpha) +$$

$$u_s \left[\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L} \lesseqgtr 1\right] (1 - \gamma - \rho_s)$$

Se indica en ellas, dentro del primer paréntesis, la limitación del valor $\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L}$ que representa la tensión de la armadura de compresión, dividida por L, cuyo valor se mantiene constante al llegar a la unidad y entrar el material en el escalón de fluencia; de modo que al ser:

$$\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) > \frac{L}{E\,\Delta} = \pi$$

hay que sustituir su expresión por este último valor constante p que llamaremos *parámetro crítico.* Aparte de esto, el campo de validez de las ecuaciones está limitado, de una parte, por la rotura del hormigón, y de otra, porque se alcance en la armadura de tracción el valor límite L.

Lo primero, la rotura del hormigón, se produce para

$$\phi = \beta\,\gamma = \frac{\alpha}{\Delta} \cdot \frac{g}{d} \frac{\delta_g}{\Delta} = \eta_g = 1$$

es decir, para y $\phi \gtrless 1$.

Lo segundo, el límite de fluencia en la armadura de tracción, se alcanza para

$$\frac{A_s}{L} = \phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L} = 1$$

o sea:

$$\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) = \pi$$

Es corriente, en los problemas de flexión simple o compuesta, considerar el canto útil *c* en vez de canto total *d.* Las ecuaciones obtenidas en este caso serían en todo análogas a las anteriores, sin más que sustituir *d* por *c,* y prescindir del recubrimiento r_s.

Así, llamando

$$P_c = \frac{N}{bcR} \;,,\; F_c = \frac{M}{bc^2R}$$

quedan las ecuaciones siguientes

$$P_c = T \cdot \gamma - W \cdot \gamma + u_a \left[\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \pi \lesseqgtr 1\right] - u_s$$

$$\left[\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) \pi \lesseqgtr 1\right]$$

$$F_c = P\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + U \cdot \gamma^2 + Z \cdot \gamma^2 + u_a \left[\phi\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right) \frac{E\,\Delta}{L} \lesseqgtr 1\right] (\gamma - \rho_a) +$$

$$+ u_s \left[\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \pi \lesseqgtr 1\right] (1 - \gamma)$$

Obsérvese que la generalidad de las ecuaciones proviene de que todos sus términos son adimensionales, viniendo los seis símbolos P, F, u_a, u_s, β, γ, ligados con los elementos a manejar corrientemente por las fórmulas:

$$P = \frac{N}{bdR} \;,,\; F = \frac{M}{bd^2R} \;,,\; u_a = \frac{a}{bd} \cdot \frac{L}{R} \;,,\; u_s = \frac{s}{bd} \cdot \frac{L}{R}$$

en las que L y R son valores conocidos para cada tipo de hormigón.

Si en lugar de flexión compuesta se trata de compresión compuesta (sin tracciones), puede seguirse la misma marcha y llegar a las ecuaciones:

$$P = T \cdot \gamma - T' \cdot \gamma + \left[\phi\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \lesseqgtr 1\right] u_a +$$

$$+ \left[\phi\left(1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma}\right. \pi \lesseqgtr 1\right] u_s$$

$$F_c = P\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + U \cdot \gamma^2 - U' \cdot \gamma^2 + \left[\phi\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \lesseqgtr 1\right] (\gamma - \rho_a)\, u_a +$$

$$+ \left[\phi\left(1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma}\right)\pi \lesseqgtr 1\right] (\gamma - 1 - \rho_s)\, u_a$$

en las que T' U' representan las mismas integrales T U halladas anteriormente, pero con los límites $[\,]_o^{\gamma-1}$ en lugar de $[\,]_o^{\gamma}$; porque de este modo representan el área de compresiones a restar, correspondiente a la altura desde la fibra neutra g = 0 a la cara menos comprimida $(\gamma - 1) = \left(\frac{g-d}{d}\right)$. Las expresiones W, Z, han desaparecido por no existir áreas de tracciones.

En la compresión compuesta, la resistencia se agota solamente por la condición y = 1; aun cuando pueda suceder que se alcance el límite de fluencia, no sólo en la armadura más comprimida *a,* sino también, aunque más raramente, en la *s.*

Puesto que se ha llegado a ecuaciones distintas para flexión y para compresión compuestas, puede hacerse, por separado también, su aplicación a la comprobación de secciones en uno y otro género de solicitación.

Se trata para ello de determinar los valores de los coeficientes flexor y compresor que agotan la resistencia. Esto puede suceder, por rotura del hormigón, es decir, para

$$\phi = \beta\,\gamma = 1$$

o por alcanzarse el valor límite o de fluencia en la armadura de tracción:

$$\phi\left(1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma}\right) = \pi$$

Introduciendo sucesiva y separadamente estos dos valores en las ecuaciones generales y prescindiendo de los términos de tracción en el hormigón Y Z, como es corriente para más seguridad, se tiene:

Para rotura del hormigón:

$$P_R = T_R \cdot \gamma + u_a\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \lesseqgtr 1\right] - u_s\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{\rho'_s}{\gamma}\right)\pi$$

$$F_R = P_R\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + U_R\,\gamma^2 + u_a\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \lesseqgtr 1\right](\gamma - \rho_a) +$$

$$+ u_s\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma} - 1\right)(1 - \gamma - \rho_s)\,\pi$$

y para la iniciación de la fluencia en la armadura *s:*

$$P_L = T_L + \gamma + u_a\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\phi \lesseqgtr 1\right] - u_s$$

$$F_L = P_L\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + U_L \cdot \gamma^2 + u_a\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\phi\;\pi \lesseqgtr 1\right](\gamma - \rho_a) +$$

$$+ u_s(1 - \gamma - \rho_s)$$

En estas ecuaciones T_L y U_L son los valores de estas integrales para el valor particular de φ que corresponde al límite de fluencia en la armadura de tracción y que viene dado por la condición

$$\phi = \eta_g = \eta_s \frac{g}{1-g} = \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma} - 1} = \frac{\gamma}{\pi - \gamma - \rho_s}$$

En compresión compuesta, el agotamiento de resistencia viene dado en todos los casos por alcanzarse la tensión de rotura del hormigón en la cara más alejada de la fibra neutra; es decir, por la condición y = 1, que ha de introducirse en las ecuaciones generales obtenidas para compresión compuesta, y que toman con esta sustitución la forma:

$$P_R = T_R\gamma - T'_R\gamma + \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \ \overline{<} 1\right] u_a \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma}\right)\pi \ \overline{<} 1\right] u_s$$

$$F_R = P_R\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + U_R \cdot \gamma^2 - U'_R \cdot \gamma^2 + \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \ \overline{<} 1\right](\gamma - \rho_a)\, u_a +$$

$$+\left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{\rho_s}{\gamma}\right)\pi \ \overline{<} 1\right](1 - \gamma - \rho_s) u_s$$

En la flexión se ha prescindido del área de tracción, pero podría tenerse también en cuenta simplemente con establecer los límites correspondientes de las funciones W, Z.

Se han referido las dimensiones longitudinales de la sección al canto total, pero ya se ha visto que lo mismo pueden deducirse las fórmulas en función del canto útil *c* con lo que se llega a las mismas expresiones sin más que suprimir en ellas r_s.

Teniendo en cuenta todo esto pueden sintetizarse las expresiones obtenidas en las siguientes:

$$P = \gamma - T\gamma - \gamma \left\{ \begin{matrix} T' & \text{para} & \gamma & < & 1 \\ W & \text{para} & \gamma & < & 1 \end{matrix} \right\}_{(1 - \gamma - \rho sc)} +$$

$$+\left[\phi\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \ \overline{<} 1\right] u_a + \left[\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \rho_{sc}\right)\pi \ \overline{<} 1\right] u_s$$

$$F = P\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + \gamma^2 - U_\gamma \cdot \gamma^2 \left\{ \begin{matrix} U' & \text{para} & \gamma & > & 1 \\ Z & \text{para} & \gamma & < & 1 \end{matrix} \right\}_{(1 - \gamma - \rho sc)} +$$

$$+\left[\phi\left(1 - \frac{\rho_a}{\gamma}\right)\pi \ \overline{<} 1\right](\gamma - \rho_a)\, u_a + \left[\phi\left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \rho_{sd}\right)\pi \ \overline{<} 1\right] (\gamma - 1 - \rho_{sd})\, u_s$$

en las que r_{sc} desaparece si se refieren al canto total *d;* y r_{sd} desaparece si se refieren al canto útil *c;* y en las que, por último, ha de establecerse también el límite $\phi = 1$, porque para este valor límite sobreviene la rotura por compresión del hormigón.

Igualmente puede generalizárselas a los casos de piezas en T, en las que el área de compresiones coge las alas y una parte del alma, considerando T_γ, U_γ, descompuestos en dos áreas parciales con sus anchos y límites correspondientes.

Ahora bien, si la pieza está sustentada hiperestáticamente, es necesario tener en cuenta las deformaciones para la determinación de las reacciones hiperestáticas.

Los recorridos de una sección cualquiera correspondiente a un punto *x y,* de la línea media, respecto a otra x_o, y_o que se tome como fija, vienen dados, como siempre, por las fórmulas:

$$\phi_{01} = \int_{l_o}^{l_1} \mu\, d\, l$$

$$X_{01} = \int_{l_o}^{l_1} \mu \cdot y \cdot dl + \int_{l_o}^{l_1} \lambda \cdot dx$$

$$Y_{01} = \int_{l_o}^{l_1} \mu \cdot x \cdot dl + \int_{l_o}^{l_1} \lambda \cdot dy$$

en las que λ es la deformación longitudinal (unitaria) de la fibra media, μ es el giro relativo de una sección respecto a otra por unidad de longitud de pieza ϕ_{01} es el recorrido angular de la sección *l* respecto a la O, y X Y son las proyecciones de los recorridos lineales sobre los dos ejes respectivos; cuando estos recorridos son conocidos, las ecuaciones anteriores han de permitir la obtención de las reacciones hiperestáticas.

En estas ecuaciones λ, μ, vienen dadas por las fórmulas:

$$\lambda = \alpha\, \frac{g - \frac{d}{2}}{d} = \beta\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\Delta$$

$$\mu = \beta\, \frac{\Delta}{d}$$

y estos valores quedan a su vez ligados, por las ecuaciones generales de equilibrio obtenidas anteriormente, con los dos coeficientes, compresor y flexor, P, F, que dependen exclusivamente de las fuerzas exteriores y de las características de la sección.

Dada la complicación de estas ecuaciones generales no puede pensarse en utilizarlas directamente para la resolución de un problema concreto; pero puede seguirse con relativa facilidad el procedimiento de aproximaciones sucesivas siguiente:

Supónganse determinadas, en primera aproximación, las reacciones hiperestáticas por los métodos usuales, esto es, admitiendo que

$$\lambda - \frac{N}{E\,\Omega} \;\;,,\;\; \mu - \frac{M}{E\,I}$$

Divídase la pieza en un número de trozos lo bastante grandes para que a lo largo de cualquiera de ellos las variaciones de su sección y de sus deformaciones sean suficientemente pequeñas.

En el centro de cualquiera de estos trozos podrán determinarse los valores de P y de F, que se deduzcan con las reacciones hiperestáticas halladas; con la ayuda de ábacos preparados al efecto, se determinarán los valores de λ, μ; y, en consecuencia, los de ϕ, X, Y, que ya no serán los previstos, sino que aparecerán con unas diferencias o errores.

Como segunda aproximación pueden introducirse en el sistema unas ciertas reacciones hiperestáticas supletorias de corrección o *correctores hiperestáticos* previamente desconocidos, pero que pueden determinarse en primera aproximación por las consideraciones siguientes: a estos errores hiperestáticos corresponderán unos aumentos o incrementos (VP) y (VF) de P y de F en cada punto o trozo y unas variaciones de λ y μ que en primera aproximación pueden suponerse iguales a las expresiones

$$(V\,\lambda) = \frac{\partial\lambda}{\partial P} - (VP) + \frac{\partial\lambda}{\partial F}\,(VF)$$

$$(V\,\mu) = \frac{\partial\mu}{\partial P} - (VP) + \frac{\partial\mu}{\partial F}\,(VF)$$

Por valores de

$$\frac{\partial\lambda}{\partial P},\; \frac{\partial\lambda}{\partial F},\; \frac{\partial\mu}{\partial P},\; \frac{\partial\mu}{\partial F}$$

en cada trozo pueden tomarse, de ábacos o tablas preparadas al efecto, los valores correspondientes a los P y F que se han obtenido en el primer cálculo.

Las expresiones (VP) y (VF) pueden obtenerse directamente en función de los correctores hiperestáticos y de las coordenadas del punto como se hace en el método clásico, y con ello se dispone de tres ecuaciones lineales en dichos correctores de las que pueden deducirse sus valores y que expresan la condición de que, por efecto de la introducción de esas fuerzas o correctores, se produzcan unos recorridos iguales y contrarios a las diferencias o errores (V f), (VX), (VY), que hayan resultado del primer cálculo respecto a lo que exijan las condiciones de sustentación de la pieza; esto es:

$$-(V\phi) = \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial P} \int (VP)\,\partial l + \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial F} \int (VF)\,\partial l$$

$$-(VX) = \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial P} \int (VP)\,y\cdot\partial l + \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial F} \int (VF)\,y\,\partial l\, +$$

$$+\, \Sigma_n \frac{\partial\lambda}{\partial P} \int (VP)\,y\,\partial x + \Sigma_n \frac{\partial\lambda}{\partial F} \int (VF)\,\partial x$$

$$-(VY) = \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial P} \int (VP)\,x\cdot\partial l + \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial F} \int (VF)\,x\,\partial l\, +$$

$$+\, \Sigma_n \frac{\partial\lambda}{\partial P} \int (VP)\,\partial y + \Sigma_n \frac{\partial\lambda}{\partial F} \int (VF)\,\partial y$$

en las que S_n representan la suma de las integrales correspondientes a cada trozo con sus límites correspondientes.

Si los trozos se toman lo suficientemente cortos para poder admitir que P y F son constantes a lo largo de cada uno de ellos, las ecuaciones toman la forma:

$$-(V\phi) = \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial P}\,(VP)\,l + \Sigma_n \frac{\partial\mu}{\partial F}\,(VF)\,l$$

$$-(VX) = \Sigma_n \left[\frac{\partial\mu}{\partial P}\,(VP) + \frac{\partial\mu}{\partial F}\,(VF)\right] y\,l\, +$$

$$+\, \Sigma_n \left[\frac{\partial\lambda}{\partial P}\,(VP) + \frac{\partial\lambda}{\partial F}\,(VF)\right] x$$

$$-(VY) = \Sigma_n \left[\frac{\partial\mu}{\partial P}\,(VP) + \frac{\partial\mu}{\partial F}\,(VF)\right] x\,l\, +$$

$$+\, \Sigma_n \left[\frac{\partial\lambda}{\partial P}\,(VP) + \frac{\partial\lambda}{\partial F}\,(VF)\right] y$$

Estas ecuaciones, una vez puestas en ellas las expresiones (VP) y (VF) en función de los correctores hiperestáticos desconocidos, resultarán, en general, lineales en ellos, por ser P y F funciones lineales de las fuerzas exteriores.

Sumando algébricamente estos valores a los obtenidos anteriormente, se tendrán unos valores más aproximados que permitirán pasar a una tercera corrección y así sucesivamente hasta obtener el límite de aproximación que se desee, con la misma o análoga complicación en cada caso que la que se tiene para el cálculo clásico de estas reacciones hiperestáticas.

No se han considerado en todo lo expuesto anteriormente más que las variaciones iniciales del hormigón bajo la acción de la primera carga. Ya se indicó que al descargarse la pieza, el diagrama tensión-deformación deja de ser único, y durante el período de carga negativa o descarga sigue una ley más aproximada a la rectilínea.

Sería necesario, por consiguiente, para el estudio de este segundo fenómeno, aplicar las leyes y fórmulas de la elasticidad clásica para superponer sus efectos (deformaciones y tensiones) a los obtenidos con arreglo a esta teoría que se aproxima a lo que le sucede al hormigón en primera carga solamente. La diferencia entre ambos resultados dará el conjunto de esfuerzos parásitos que quedan en la pieza de hormigón armado después de sometida a uno o varios períodos de carga.

Si se admite, como ya se dijo, que a igualdad de tiempo las deformaciones lentas son proporcionales a las producidas por la carga instantánea o breve, y se admite una ley para su variación a lo largo del tiempo como la de Whitney, por ejemplo, se pueden estudiar también las alteraciones del régimen de esfuerzos que se producen en la pieza bajo la acción del tiempo por efecto de estas cargas duraderas. Bajo su efecto, varían las deformaciones del hormigón con el tiempo y, por consiguiente, al variar ∅ varía el parámetro crítico p.

Como consecuencia de estas variaciones pueden alterarse las reacciones hiperestáticas a lo largo del tiempo, y pueden determinarse estas variaciones por un método análogo al indicado en el párrafo anterior.

Llamando $(V_t\ p)$, $(V_t\ P)$, $(V_t\ F)$ las variaciones o incrementos que sufren las tres variables en un determinado período de tiempo a lo largo del cual las derivadas parciales

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\pi},\ \frac{\partial\lambda}{\partial P},\ \frac{\partial\lambda}{\partial F},\ \frac{\partial\mu}{\partial\pi},\ \frac{\partial\mu}{\partial P},\ \frac{\partial\mu}{\partial F}$$

tengan variaciones suficientemente pequeñas para poder suponer unos valores medios constantes de las mismas, pueden escribirse para cada punto o trozo de pieza, las expresiones

$$-(V_t\lambda)=\frac{\partial\lambda}{\partial\pi}(V_t\pi)+\frac{\partial\lambda}{\partial P}(V_t P)+\frac{\partial\lambda}{\partial F}(V_t F)$$

$$-(V_t\mu)=\frac{\partial\mu}{\partial\pi}(V_t\pi)+\frac{\partial\mu}{\partial P}(V_t P)+\frac{\partial\mu}{\partial F}(V_t F)$$

Tomando de ábacos o tablas preparados para ello, los valores de las derivadas parciales, e introduciéndolos en las expresiones de los recorridos totales de un extremo de la pieza respecto al otro, se tiene:

$$(V_t\phi)=\Sigma_n(V_t\ \mu)\ l$$

$$(V_t X)=\Sigma_n(V_t\ \mu)\int y\,\partial l+\Sigma_n(V_t\ \lambda)\ x$$

$$(V_t\ Y)=\Sigma_n=(V_t\ \mu)\int x\,\partial l+\Sigma_n(V_t\ \lambda)\ y$$

Los primeros términos han de ser nulos si la pieza está rígidamente empotrada, o ser iguales a los de las piezas con quienes enlaza en el extremo; los segundos términos son funciones solamente de las derivadas parciales antedichas, y de los valores $(V_t\pi)$, $(V_t\ P)$, $(V_t\ F)$, de los cuales, el primero es un dato fijado por la ley de Whitney u otra análoga, y los otros dos pueden ponerse en función de las tres variables o incrementos de las reacciones hiperestáticas en el extremo (si las demás fuerzas exteriores son independientes de sus recorridos).

Se tendrá, pues, un sistema de tres ecuaciones que permitirá determinar las variaciones de las tres reacciones hiperestáticas que se produzcan por efecto de las variaciones del módulo de deformación en un determinado período de tiempo.

Del mismo modo, en el período siguiente, entrando con estas reacciones incrementadas, podrán determinarse las nuevas variaciones, etc.

En general, bastará descomponer el proceso total de la deformación lenta bajo las cargas permanentes en unos pocos períodos o partes, para cada uno de los cuales podrán perpararse los ábacos, de los que pueden tomarse con suficiente aproximación todos los datos necesarios para hacer estos cálculos en una pieza de determinadas cuantías características.

El modo de operar en esta última parte no es muy elegante desde el punto de vista matemático, pero puede resultar útil en la práctica siempre que se disponga de estos ábacos o tablas que faciliten los valores que entran en las fórmulas a emplear.

Claramente se ve, y es quizá la consecuencia más importante que puede sacarse de este estudio, la prolijidad que en el cálculo concreto de una estructura representa la complicación de leyes como éstas, en lugar de las clásicas de la elasticidad lineal. No es posible pretender su aplicación directa a la técnica y al cálculo de los proyectos de construcción a no ser que se establezcan tablas, ábacos o fórmulas empíricas, de cómodo manejo, cuyos resultados se acomoden aproximadamente a los que se obtengan de teorías así desarrolladas.

Pero como, por otra parte, la técnica actual exige este grado de afinamiento y estudio para continuar avanzando por los caminos iniciados de las grandes luces y fuertes esbelteces a que ellas obligan, es evidente que será necesario establecer sistemas de trabajo que permitan obtener resultados avalados por teorías así establecidas sobre regímenes anelásticos o por lo menos de elasticidad no lineal.

Los resultados que se obtienen de la teoría anteriormente expuesta son, por otra parte, alentadores en cuanto que la experimentación directa sobre piezas en flexión que he podido recoger los corrobora completamente. Las flexiones que producen la rotura, particularmente con cuantías críticas o supracríticas, son muy superiores a las que se deducen de la teoría clásica y superan ligeramente a las que se obtienen operando como acaba de hacerse, según correspondería a la aplicación de esta nueva teoría si en vez de considerarse para agotamiento resistente de la pieza el momento en que la fibra extrema alcanza la máxima carga de rotura, se considerase aquel en que esta fibra alcanza la carga final de rotura. Es decir, si se considerase el diagrama tensión-deformación completo hasta esta carga final de rotura.

No parece, sin embargo, prudente hacerlo así para las aplicaciones prácticas, ni tomar esa resistencia última para la aplicación del coeficiente de seguridad, por razones de tipo técnico y práctico, que se salen del marco de esta exposición; pero sí interesa señalarlo, no sólo por la comprobación que ello representa, sino porque es prueba también de que, análogamente a lo que ocurre con el hormigón en tracción cuando está acompañado de armaduras, en este caso de compresión por flexión en el que sólo las fibras extremas trabajan al máximo, éstas siguen mejor su trabajo hasta más allá de su carga máxima de rotura, sin que aparezcan roturas prematuras antes de llegar en el diagrama tensión-deformación a la tangente horizontal, como sucede a veces en el ensayo a compresión simple de probetas sin armar.

Todo el estudio se ha referido solamente al diagrama o estado de primera carga breve o permanente; en los casos de cargas repetidas o alternativas, la aparición de los esfuerzos parásitos antes indicados, harán probablemente imposible la utilización de materiales como los actuales; pero, por lo general, en las grandes construcciones, son las cargas fijas las que predominan, y en ellas el empleo de estas teorías anelásticas son, a mi juicio, de un porvenir inmediato, o en realidad pertenecen ya al momento presente, puesto que se tiende a construir las estructuras y se calculan hoy con procedimientos y fórmulas empíricas preparadas de modo que se tengan en cuenta con mayor o menor aproximación los fenómenos que se acusan por efecto de esta falta de constancia en los módulos cuando se trabaja con fuertes tensiones relativas.

Por otra parte, los estudios que he podido realizar partiendo de estas teorías, me han demostrado la posibilidad de obtener, por lo menos en gran número de casos, fórmulas verdaderamente prácticas para su aplicación directa, que permitan igual o quizá mayor sencillez de comprobación todavía que las fórmulas usuales. Como resultados generales en este sentido, pueden establecerse los siguientes: las cuantías críticas que resultan son siempre superiores a las que se deducen con los métodos y teorías clásicos de cálculo del hormigón armado, y mucho más aproximados a la realidad experimental.

En general, como las cuantías prácticas y económicas son inferiores a las críticas, basta aplicar la teoría anterior, con vistas solamente al cálculo de la armadura; pues ya se sabe de antemano que el fallo de resistencia tiene que ser, en este género de piezas, por la armadura y nunca por el hormigón. En estos casos corrientes de cuantías infracríticas, los momentos que se obtienen se separan tanto menos de los resultados de la teoría clásica cuanto menor es la cuantía; aun cuando, en general, la resistencia que se obtiene es superior a la que se deduce de la teoría clásica; sin embargo, con cuantías fuertes y con cargas permanentes o duraderas, resulta la armadura algo sobrecargada, y es necesario aumentar a veces hasta un diez por ciento la que se obtiene de la teoría clásica.

Con cuantías supracríticas se obtiene un fuerte aumento de resistencia sobre la teoría usual, de acuerdo siempre con la comprobación experimental.

Fijándose en el caso más corriente de flexión simple en piezas rectangulares, es curioso observar la sencillez de los resultados siguientes, que pueden comprobarse en la teoría anterior.

Para los coeficientes de seguridad clásicos y con errores menores del 2 por 100, se tiene, trabajando con el acero normal, que la cuantía crítica viene dada por las fórmulas siguientes:

$$\text{para cargas breves: } q\ (^0/_0) = \frac{R\ (\text{kg/cm}^2)}{100}$$

$$\text{para cargas duraderas: } q\ (^0/_0) = \frac{q\ (\text{kg/cm}^2)}{86}$$

siendo R la carga máxima de rotura obtenida directamente de ensayos a compresión simple.

Para cuantías superiores a ésta:

$$\frac{M}{R \cdot b \cdot c^2} = 0{,}275 \sqrt[4]{\frac{q\,(^0/_0)}{R}}$$

siendo q la cuantía en por 100 y R la resistencia o carga máxima de rotura a compresión real del material; y para cuantías inferiores, que suelen ser las económicas, se tiene:

$$\text{para cargas breves: } \begin{cases} c > 3{,}37\,\sqrt{M/R \cdot b} \\ \dfrac{M}{b \cdot c^2} = 10\,q\,(^0/_0) + 0{,}003\,R \end{cases}$$

$$\text{para cargas durareras: } \begin{cases} c > 3{,}32\,\sqrt{M/R \cdot b} \\ \dfrac{M}{b \cdot c^2} = 9\,q\,(^0/_0) + 0{,}003\,R \end{cases}$$

Cito esto, solamente como ejemplo de la posibilidad de encontrar fórmulas de manejo práctico sencillísimo que permitan aplicar cómodamente los resultados de una teoría relativamente complicada para su aplicación directa por el técnico práctico como es la anterior; y, en todo caso, siempre se puede disponer de ábacos preparados al efecto que relacionen directamente el flexor y compresor, para obtener las condiciones de agotamiento de resistencia de la pieza, lo mismo si se trata de una pieza de sección rectangular que en T; por consiguiente, la comprobación a flexión o compresión compuestas de una pieza de este género puede hacerse también rápidamente con un cortísimo número de operaciones aritméticas.

No concedo, sin embargo, a las leyes y métodos expuestos más importancia que la de iniciar un posible camino de generalización sobre la resistencia de materiales clásica. El camino a recorrer es largo, en realidad indefinido; pero no cabe duda de que en esta rama de la técnica, como antes señalé, se afina cada día más a trueque de mayores complicaciones y perfeccionamientos en las teorías; y no es posible volver la espalda a ello ni buscar razones en contra, sobre todo si después de la complicación de las teorías se encuentran fórmulas prácticas o métodos de trabajo que permitan obtener el resultado con relativa simplificación, aun cuando ésta no sea tan grande ni tan cómoda como la que se obtiene en las teorías elaboradas en el siglo pasado, cuya eficacia no hemos apreciado bastante hasta el momento en que se han visto las complicaciones de estas otras; por ello debemos un agradecimiento máximo a aquellos genios de la ciencia que, muchas veces sin pensar en las aplicaciones prácticas, nos proporcionaron esta magnífica, eficaz y cómoda herramienta con la que sigue trabajando hoy el ingeniero.

Y no tenemos ciertamente idea de la preparación científica que necesitará el ingeniero futuro ni del grado de complicación de las teorías y de los recursos matemáticos que habrá de utilizar para el proyecto de ciertas obras; porque, cuanto más se quiere en la práctica aproximarse a las condiciones de rotura para obtener un mayor aprovechamiento de los materiales, más importancia tendrá, no sólo encajar en fórmulas e hipótesis estos estados de tensión anelásticos, sino también el llegar a conocer lo más íntimamente posible las causas intrínsecas de la rotura o de la plasticidad y el por qué de la resistencia y de la cohesión. Ello ha obligado, ya hoy, a enlazar estos estudios con los de la constitución de la materia y a buscar las leyes estadísticas que rigen los fenómenos resistentes, entre otros, como tan brillantemente ha expuesto en recientes cursos el profesor Terradas, maestro máximo en todas estas cuestiones físicas y matemáticas relacionadas con los problemas de la construcción.

Mi aportación a todas estas materias no puede ni siquiera considerarse modesta; es nula. Pero, como ingeniero, no tengo más remedio que interesarme por ellas y pedir de vosotros, los que sabéis hacerlo y lo estáis haciendo, que nos suministréis las nuevas teorías y métodos de trabajo y cálculo que hagan avanzar más y más la técnica de la construcción para poder atender debidamente las exigencias cada vez mayores que sobre los ingenieros carga la sociedad moderna.

Si mi presencia aquí logra hacer el papel de mendigo que a fuerza de pedir una limosna sirve para haceros comprender mejor el valor de vuestra fortuna, que en este caso es sabiduría, me daré por satisfecho.

He dicho.